Indépendance et différences

Ayoub Hajlaoui

Après coalition entre insurgés et France,
l'on fit déclaration de cette indépendance.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0\ ;\ 1[$.

Pour tout entier naturel i, on note E_i l'événement : $[X_{i+1} \neq X_i]$

1) Montrer que pour tous entiers naturels non nuls i et j tels que $j > i+1$, les événements E_i et E_j sont indépendants.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les E_i soient deux à deux indépendants.

Correction :

1) Soient i et j deux entiers naturels tels que $j > i+1$.

Intuitivement, les événements E_i et E_j sont indépendants car ils font intervenir X_i et X_{i+1} d'une part, et X_j et X_{j+1} d'autre part, avec $i < i+1 < j < j+1$, mais comment le montrer proprement ?

L'événement E_i peut aussi s'écrire : $[X_i - X_{i+1} \neq 0]$. En posant f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x - y$, on a donc $E_i = [f(X_i, X_{i+1}) \neq 0]$. De même, $E_j = [f(X_j, X_{j+1}) \neq 0]$

Or, $i < i+1 < j < j+1$. Donc, par indépendance mutuelle de toutes les X_n :
X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1} sont mutuellement indépendantes.
D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $f(X_i, X_{i+1})$ et $f(X_j, X_{j+1})$ sont indépendantes. En particulier, les événements $[f(X_i, X_{i+1}) \neq 0]$ et $[f(X_j, X_{j+1}) \neq 0]$ sont indépendants.

On a bien montré : $\boxed{\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2, : j > i+1 \Longrightarrow E_i \text{ et } E_j \text{ indépendants}}$

2) La question 1) nous a permis de montrer que pour tous entiers naturels i et j tels que $j > i+1$, E_i et E_j sont indépendants. Elle donne aussi le même résultat pour tous entiers naturels i et j tels que $i > j+1$ (en permutant les rôles de i et j). Et ce, sans aucune condition particulière sur p. Reste à traiter le cas où i et j sont consécutifs.

La condition que l'on nous demande de trouver est donc une condition nécessaire et suffisante sur p telle que, pour tout entier naturel i, E_i et E_{i+1} soient indépendants.
Le lemme des coalitions ne peut être invoqué dans ce cas car la variable aléatoire X_{i+1} intervient à la fois dans l'événement $E_i = [X_{i+1} \neq X_i]$ et dans l'événement $E_{i+1} = [X_{i+2} \neq X_{i+1}]$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$: $P(E_i \cap E_{i+1}) = P\big([X_i \neq X_{i+1}] \cap [X_{i+1} \neq X_{i+2}]\big)$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Et rappelons que X_i n'a que deux valeurs possibles...

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_i :

$$P(E_i \cap E_{i+1}) = P\big([X_i = 0] \cap [X_i \neq X_{i+1}] \cap [X_{i+1} \neq X_{i+2}]\big) + P\big([X_i = 1] \cap [X_i \neq X_{i+1}] \cap [X_{i+1} \neq X_{i+2}]\big)$$

Donc $P(E_i \cap E_{i+1}) = P\big([X_i = 0] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 0]\big) + P\big([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 0] \cap [X_{i+2} = 1]\big)$

Par indépendance mutuelle des variables aléatoires X_i, X_{i+1} et X_{i+2} :
$P(E_i \cap E_{i+1}) = P(X_i = 0) \times P(X_{i+1} = 1) \times P(X_{i+2} = 0) + P(X_i = 1) \times P(X_{i+1} = 0) \times P(X_{i+2} = 1)$

Ces trois variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, on en conclut :
$P(E_i \cap E_{i+1}) = (1-p)p(1-p) + p(1-p)p = p(1-p)(1-p+p)$ *On a factorisé par $p(1-p)$.*

Par suite : $P(E_i \cap E_{i+1}) = p(1-p)$

D'autre part : $P(E_i) \times P(E_{i+1}) = P(X_i \neq X_{i+1}) \times P(X_{i+1} \neq X_{i+2})$
En appliquant la formule des probabilités totales comme précédemment :
$P(E_i) \times P(E_{i+1}) = \big(P([X_i = 0] \cap [X_{i+1} = 1]) + P([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 0])\big)\big(P([X_{i+1} = 0] \cap [X_{i+2} = 1])$
$+ P([X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 0])\big) = \big(2(1-p)p\big)^2$ (cf indépendances et loi de Bernoulli).

Donc $P(E_i) \times P(E_{i+1}) = 4(1-p)^2p^2$

Les événements E_i et E_{i+1} sont indépendants si et seulement si $P(E_i \cap E_{i+1}) = P(E_i) \times P(E_{i+1})$, c'est-à-dire si et seulement si $p(1-p) = 4(1-p)^2p^2$.
p et $1-p$ étant non nuls, cela équivaut à : $1 = 4(1-p)p$
E_i et E_{i+1} sont indépendants si et seulement si $4p^2 - 4p + 1 = 0$

$$4p^2 - 4p + 1 = 0 \iff p^2 - p + \frac{1}{4} = 0 \iff p^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times p + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff p = \frac{1}{2}$$

On aurait bien sûr pu calculer le discriminant de $4X^2 - 4X + 1$, on aurait trouvé 0, et ça aurait sonné comme une réprimande polynomiale nous reprochant de ne pas avoir vu l'identité remarquable qui nous pendait au nez.

$$\boxed{\text{Une condition nécessaire et suffisante pour que les } E_i \text{ soient deux à deux indépendants est donc : } p = \frac{1}{2}}$$