Autour du module

Ayoub Hajlaoui

Ne pouvant arrêter la danse du pendule
en attendant l'été, révisons nos modules.

Énoncé : (temps conseillé : 40 minutes)

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \overline{z} = |z|$

2) Soient a et b deux nombres complexes non nuls. Montrer l'égalité suivante :
$\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a| \times |b|}$

3) Soient A et B les points du plan d'affixes respectives $1 + 2i$ et $-2 + i$.
A tout point $M \neq B$ (M d'affixe z), on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z - 1 - 2i}{z + 2 - i}$.
a) Donner une signification géométrique de $|z'|$.
b) En déduire l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

Correction :

1) Soit z un nombre complexe, qu'on écrira sous forme algébrique $z = a + ib$ (avec a et b réels).
$z + \overline{z} = |z| \quad \Leftrightarrow \quad a + ib + a - ib = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[(2a)^2 = a^2 + b^2 \ \underline{\text{ET}} \ a \geq 0\right]$

Ne surtout pas oublier « et $a \geq 0$ » , sans quoi l'équivalence est perdue. En effet :
$2a = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow (2a)^2 = a^2 + b^2$ *mais on n'a pas :* $(2a)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2a = \sqrt{a^2 + b^2}$
En fait, $(2a)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left[2a = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ou } 2a = -\sqrt{a^2 + b^2}\right]$

Donc : $z + \overline{z} = |z| \quad \Leftrightarrow \quad \left[(4a^2 = a^2 + b^2 \text{ et } a \geq 0\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[(3a^2 = b^2 \text{ et } a \geq 0\right]$
$\Leftrightarrow \quad \left[(b = \sqrt{3} \times a \text{ ou } b = -\sqrt{3} \times a \text{ (avec } a \geq 0 \text{ dans les deux cas)}\right]$

D'accord, mais qu'est-ce que ça signifie pour le point M ? Rappelons que a correspond à l'abscisse de M et b à son ordonnée...

$b = \sqrt{3} \times a$ signifie que M est sur la droite d'équation $y = \sqrt{3}\, x$.
$b = \sqrt{3} \times a$ avec $a \geq 0$ signifie que M est sur la demi-droite d'équation $y = \sqrt{3}\, x$ avec $x \geq 0$.
De même, $b = \sqrt{3} \times a$ avec $a \leq 0$ signifie que M est sur la demi-droite d'équation $y = -\sqrt{3}\, x$ avec $x \geq 0$.

En conclusion, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \overline{z} = |z|$ est
$\boxed{\text{l'union des deux demi-droites d'équations } y = \sqrt{3}\, x \text{ et } y = -\sqrt{3}x \text{ avec } x \geq 0.}$

2) *Cette question est une course de haies où, pour sauter chaque haie, il faut se souvenir et utiliser judicieusement une propriété du cours sur le module.*

L'on serait tenté de commencer par mettre les deux fractions dans le module sous le même dénominateur, en écrivant : $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\left|\dfrac{a|b|^2-b|a|^2}{|a|^2|b|^2}\right|$

Bien que l'on puisse se débrouiller à partir de là pour parvenir au bon résultat, il est plus efficace de remplacer les carrés de modules au dénominateur, pourvu que l'on ait en tête une propriété salvatrice du cours... Rappelons que pour tout nombre complexe z, $|z|^2=z\overline{z}$.

(en se servant de $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$*)*

$\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\left|\dfrac{a}{a\overline{a}}-\dfrac{b}{b\overline{b}}\right|=\left|\dfrac{1}{\overline{a}}-\dfrac{1}{\overline{b}}\right|$. *Là, je veux bien mettre sous le même dénominateur...*

Donc $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\left|\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{a}\overline{b}}\right|=\left|\dfrac{\overline{b-a}}{\overline{a}\overline{b}}\right|=\dfrac{\left|\overline{b-a}\right|}{\left|\overline{a}\right|\times\left|\overline{b}\right|}$ *(propriétés de la conjugaison)*

Rappelons aussi que pour tout nombre complexe z, $\left|\overline{z}\right|=\left|z\right|$

D'où : $\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{\left|b-a\right|}{\left|a\right|\left|b\right|}$. De plus : $|b-a|=|a-b|$

En effet, pour tout nombre complexe z, $\left|-z\right|=\left|z\right|$

En conclusion : $\boxed{\left|\dfrac{a}{|a|^2}-\dfrac{b}{|b|^2}\right|=\dfrac{\left|a-b\right|}{|a|\ |b|}}$

3) *De cet exercice un peu décousu, c'est la question 3 qui était la plus simple.*

a) Notons z_A et z_B les affixes respectives de A et B. z est l'affixe du point M.

$\left|z'\right|=\left|\dfrac{z-1-2i}{z+2-i}\right|=\left|\dfrac{z-(1+2i)}{z-(2+i)}\right|=\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|}$. Donc $\boxed{\left|z'\right|=\dfrac{AM}{BM}}$

b) L'ensemble des points M tels que $\left|z'\right|=1$ est donc l'ensemble des points M différents de B tels que $\dfrac{AM}{BM}=1$, c'est-à-dire tels que $AM=BM$.

L'ensemble des points M tels que $\left|z'\right|=1$ est donc l'ensemble des points M équidistants à A et à B. $\boxed{\text{Cet ensemble est donc la médiatrice du segment } [AB].}$

Ai-je abandonné arbitrairement la condition « différents de B » en cours de route ? Aurais-je dû dire : « la médiatrice de $[AB]$ *privée de B » ? C'eût été inutile, car B ne peut être sur la médiatrice de* $[AB]$.