Suite de produits trigonométriques

Ayoub Hajlaoui

Fier et régénéré, il boit du petit-lait
car il a su gérer un produit aussi laid

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 15 minutes) *d'après EDHEC ECS mai 1996*

Dans cet exercice, x désigne un réel de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \cos(x)$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

1) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Montrer que (v_n) est géométrique.

2) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n et x.

3) Démontrer que pour tout réel positif t, on a l'encadrement suivant : $t - t^2 \leq \sin(t) \leq t$

4) En déduire $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t}$.

5) Montrer enfin que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1) *Les suites en jeu ont beau avoir des têtes plus effrayantes que d'habitude, ne changeons pas nos bonnes habitudes...*

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

Ah, et là, si on ne connaît pas bien ses formules de trigonométrie, on risque de bloquer...

Rappelons que pour tous réels a et b, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
En particulier : $\sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a)$
Autrement dit : $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Enfin : $\sin(a)\cos(a) = \frac{1}{2} \times \sin(2a)$
On peut bien entendu donner directement la dernière formule, mais c'était juste pour vous rappeler qu'elle découle plus simplement d'une formule plus générale.

Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2} \times \sin\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \times u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$. $\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$

2) La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme
$v_0 = u_0 \sin\left(\frac{x}{2^0}\right) = u_0 \sin(x) = \cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2} \times \sin(2x)$. On en déduit l'expression de v_n :
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \times \sin(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sin(2x)$

Oui mais c'est u_n qu'ils veulent, pas v_n ! ! Ah. Vous ne voyez pas le lien entre u_n et v_n ?

Nous savons par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ (*)

Ce serait bien de pouvoir diviser par $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$*.. Mais pas question de le faire sans justifier.*

D'après l'énoncé, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Et, pour tout entier naturel n, $2^n > 0$. Donc $0 < \frac{x}{2^n} < \frac{1}{2^n} \times \frac{\pi}{2}$.
Or, $\frac{1}{2^n} \times \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$. Donc, par transitivité, $0 < \frac{x}{2^n} < \frac{\pi}{2}$.
Autrement dit : $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Et sur cet intervalle, la fonction sinus ne s'annule pas (plus précisément, elle y est strictement positive).
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$. (*) donne donc : $u_n = \dfrac{v_n}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

En remplaçant v_n par l'expression trouvée précédemment, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$$

3) *Pour démontrer ce genre d'inégalité compliquée, dont on ne voit pas comment la démonstration pourrait se faire de manière directe, on peut essayer de passer par une étude de fonction.*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $f(t) = t - \sin(t)$
f est dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par somme de telles fonctions.
Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$ (car $\cos(t) \leq 1$).
Oui, je sais, on a même $-1 \leq \cos(t) \leq 1$, mais l'inégalité de gauche ne sert pas ici.
f est donc croissante sur $[0\,;\ +\infty[$. Et $f(0) = 0 - \sin(0) = 0$.
Donc, pour tout $t \geq 0$, $f(t) \geq 0$. Autrement dit : $t - \sin(t) \geq 0$
On a montré : $\underline{\forall t \geq 0,\ \sin(t) \leq t}$

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $g(t) = \sin(t) - (t - t^2) = \sin(t) - t + t^2$
g est dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par somme de telles fonctions.
$\forall t \geq 0$, $g'(t) = \cos(t) - 1 + 2t$. *Le signe de g' est moins évident que celui de f'. Allez, rebelote...*
g' est dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par somme de telles fonctions.
Pour tout $t \geq 0$, $g''(t) = -\sin(t) + 2 > 0$ (car $\sin(t) \leq 1 < 2$)
g' est donc strictement croissante sur $[0\,;\ +\infty[$. Et $g'(0) = \cos(0) - 1 + 2 \times 0 = 0$
Donc, pour tout $t \geq 0$, $g'(t) \geq 0$.
On a « de la chance » : si on avait, par exemple, trouvé $g'(0) = -3$, on n'aurait pas pu conclure aussi simplement. N'importe quelle valeur positive de $g'(0)$ aurait convenu, puisque, par la croissance de g' sur $[0\,;\ +\infty[$, elle aurait aussi entraîné la positivité de g' sur $[0\,;\ +\infty[$.
On en déduit que g est croissante sur $[0\,;\ +\infty[$. Et $g(0) = \sin(0) - 0 + 0^2 = 0$.
Donc, pour tout $t \geq 0$, $g(t) \geq 0$. Autrement dit : $\sin(t) - (t - t^2) \geq 0$
On a montré : $\underline{\forall t \geq 0,\ t - t^2 \leq \sin(t)}$

$\boxed{\text{En conclusion, pour pour tout réel positif } t \text{, on a bien l'encadrement suivant : } t - t^2 \leq \sin(t) \leq t}$

4) *La question 3 était difficile. La 4 l'est moins ! On nous parle d'un encadrement en 3), et on nous demande d'en déduire une limite en 4). N'est-ce pas téléphoné ?*
Par contre, attention à un détail important : l'encadrement ayant été démontré pour tout réel positif (et non pas pour tout réel), on pourra faire tendre t vers 0 mais en restant positif...

D'après 3), pour tout réel $t \geq 0$: $t - t^2 \leq \sin(t) \leq t$.
Cet encadrement est en particulier vrai pour tout $t > 0$. *Je me prépare à diviser par t...*

Donc, pour tout $t > 0$: $\dfrac{t-t^2}{t} \leq \dfrac{\sin(t)}{t} \leq \dfrac{t}{t}$. Autrement dit : $1 - t \leq \dfrac{\sin(t)}{t} \leq 1$

$\lim\limits_{t \to 0^+} 1 - t = 1$. Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1}$

Oui mais on ne veut pas juste la limite en 0^+, *on veut la limite en* 0. *Il nous manque donc la limite en* 0^-. *L'imparité de la fonction sinus va nous aider...*

Calculons $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{\sin(t)}{t}$. En posant le changement de variable $x = -t$, on a $\lim\limits_{t \to 0^-} x = 0^+$.

D'où : $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\sin(x)}{-x}$ par imparité de la fonction sinus.

Donc : $\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{\sin(t)}{t} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x}$. Et enfin : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^-} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1}$

En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1}$

Remarquons au passage que s'il n'y avait pas eu la question 4) juste avant, nous aurions aussi pu passer par une limite de taux d'accroissement (sachant sin dérivable sur $\mathbb{R}$ *donc en particulier en* 0, *de dérivée cos...)*

5) *Ok, quel rapport entre ce qu'on vient de faire et* (u_n) *?*

On a montré en 2) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times \dfrac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

En 4), nous avions déterminé la limite en 0 *d'un quotient avec du sinus.. Qu'est-ce qui, dans l'expression de* u_n, *tend vers* 0 *lorsque n tend vers* $+\infty$ *? Je ne vois personne d'autre que* $\dfrac{x}{2^n}$ *..*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sin(2x) \times \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \dfrac{1}{\frac{x}{2^n}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sin(2x) \times \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \dfrac{2^n}{x}$

J'ai fait apparaître un terme qui m'intéresse car je sais calculer sa limite...

Donc $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \times \sin(2x) \times \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \dfrac{2^n}{x} = \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ $\quad (*)$

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. En posant le changement de variable $t = \dfrac{x}{2^n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} t = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{\frac{t}{\sin(t)}}$

Et on a montré en 4) : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$. Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{\frac{t}{\sin(t)}} = 1$

Il s'ensuit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = 1$

En reprenant l'expression de u_n obtenue en (*), on obtient finalement, par produit de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(2x)}{2x} \times \dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \dfrac{\sin(2x)}{2x}$. En conclusion : $\boxed{(u_n) \text{ converge et sa limite est } \dfrac{\sin(2x)}{2x}}$

Et rien de choquant à ce que cette limite contienne du x. x est une constante au regard de la suite (u_n). C'est n qui tend vers $+\infty$.