Démonstration d'une croissance comparée

Ayoub Hajlaoui

Qui pour te modérer, croissance exponentielle ?
Qui pour te tempérer dans ta montée sans ciel ?

Enoncé :

Dans cet exercice, on veut démontrer que : $\dfrac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$.

1) Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.

2) Etudier le sens de variation de h.

3) Conclure.

Correction :

1) *Toujours la petite phrase pour se justifier avant de dériver, nécessaire en début de sujet, lorsque le correcteur ne s'est pas encore forgé une image claire de moi ; phrase qui devient un peu moins nécessaire si je manque de temps et que je suis en question 4)b) de l'exercice 5...*

h est une somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle et une fonction polynôme). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{h'(x) = e^x - 1 - x}$. h' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ (même raison que pour h).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{h''(x) = e^x - 1}$

2) *Qui dit " sens de variation de h " dit " signe de h' ". Mais bonne chance pour étudier le signe de h' à partir de l'expression obtenue en 1... Essayez si vous le voulez vraiment, mais vous vous retrouverez vite coincé avec une inéquation du style $e^x - 1 - x \geq 0$. Nous nous retrouvons dans un cas où, pour avoir le signe de h', on va s'aider de h''. Le signe de h'' nous donnera les variations de h', alors que nous voulons le signe de h' ! Comment passer de l'un à l'autre ? C'est ce que nous allons voir...*

Étudions le signe de h'', en résolvant sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $h''(x) \geq 0$:

$h''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(1)$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$
$\Longleftrightarrow x \geq 0$ (et de même : $h''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$)

Pour ceux qui n'ont pas encore vu ln au moment où ils lisent ça (ça ne saurait tarder), il suffit de rappeler que la fonction exponentielle est strictement croissante et de dire :
$e^x \geq 1 \Longleftrightarrow e^x \geq e^0 \Longleftrightarrow x \geq 0$

D'ailleurs, pourquoi préciser « strictement » croissante, alors que les inégalités sont larges ? Sans le caractère strict de la croissance de f sur l'intervalle considéré, l'implication $f(a) \geq f(b) \Longrightarrow a \geq b$ n'est plus garantie (et dans notre cas, il nous faut les deux implications pour l'équivalence). Cet exercice est aussi corrigé en vidéo (même si l'énoncé a moins d'étapes), et vous trouverez plus de détails sur cette histoire de stricte croissance à ce moment de la correction.

Voici donc le tableau de signe obtenu pour h'', et le tableau de variations de h' correspondant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h''(x)$		$-$		$+$	
Variations de h'		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$

Pour ce qui est des limites, on peut calculer celle en $-\infty$ sans problème, sachant que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} -x - 1 = +\infty$

Par contre, le calcul de la limite en $+\infty$ nous met face à une forme indéterminée. Et si je veux faire le malin en factorisant par x pour ensuite utiliser un théorème de croissance comparée, je tombe dans une grave erreur de raisonnement : comme précisé dans l'énoncé, l'exercice en lui-même vise à démontrer cette croissance comparée. Il est donc hors de question que je l'utilise ici ; le serpent se mordrait la queue.

Mais au fait, ai-je réellement besoin de connaître les limites de h' en $+\infty$ et $-\infty$? N'oublions pas ce que je veux connaître de h' : son signe. N'ai-je pas directement son signe avec le tableau de variation obtenu ?

Les variations de h' nous indiquent que h' admet un minimum en 0. Ce minimum vaut $h'(0) = 0$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \geq 0$. *(n'avons-nous pas là le signe de h' ?)*
Et h' ne s'annule qu'en 0, par stricte décroissance de h' sur $\mathbb{R}_-$ et stricte croissance de h' sur $\mathbb{R}_+$ (h'' étant en fait strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$).

Donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

3) *Conclure.. Que veulent-ils dire ? Pourquoi m'avoir fait étudier les variations de h ? En quoi cela servira-t-il dans le calcul de limite qui m'attend ?*
Regardons bien la fonction h. h est une différence entre deux fonctions, la fonction exponentielle d'une part, et une fonction polynôme de degré 2 d'autre part. Mais ce qui m'intéresse, c'est $\frac{e^x}{x}$... Si je divisais tout par x, le polynôme serait transformé en $\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$... Ce qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$... Du coup, tout revient peut-être à comparer l'exponentielle et le polynôme...

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0) = e^0 - (1 + 0 + 0) = 0$
Donc h est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

A la rigueur, $\mathbb{R}_-$ ne m'intéresse pas, puisque je veux aboutir à un résultat sur une limite en $+\infty$...

$\forall x > 0,\ \ h(x) \geq 0$ donc $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$ (car $x > 0$) Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} = +\infty$.

Donc, par théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com