Le seul élément d'ordre 2

Ayoub Hajlaoui

« De mes premiers débuts à l'ultime linceul,
il n'est, me promets-tu, de ton ordre qu'un seul. »

Énoncé : (temps conseillé : 10 min)

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini d'élément neutre noté e, et possédant un seul élément d'ordre 2, que l'on notera a. Soit $C_G = \{g \in G,\ \forall x \in G,\ gx = xg\}$

Montrer que $a \in C_G$.

Correction :

Pour l'anecdote, C_G, qui est en fait l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, est appelé centre de G.

Montrons que : $\forall x \in G,\ ax = xa$.
Nous avons une information sur l'ordre de a. Mettons-nous en condition pour pouvoir l'utiliser...

Cela revient à montrer, pour tout $x \in G$, en multipliant à droite dans chacun des membres par le symétrique x^{-1} de x : $(ax)x^{-1} = (xa)x^{-1}$, c'est-à-dire (par associativité) : $a(xx^{-1}) = xax^{-1}$, c'est-à-dire : $a = xax^{-1}$

Soit $x \in G$. Montrons que $xax^{-1} = a$.

Mais comment faire ? Nous savons que a est le seul élément d'ordre 2 de G. Il suffit donc de montrer que xax^{-1} (qui est évidemment un élément de G puisque la loi . du groupe est interne) est d'ordre 2, et le tour est joué...

Montrons que xax^{-1} est d'ordre 2. Autrement dit, montrons : $(xax^{-1})^2 = e$ <u>et</u> $xax^{-1} \neq e$
Eh oui, n'oublions pas que l'ordre de a est <u>le plus petit</u> $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = e$

$(xax^{-1})^2 = (xax^{-1})(xax^{-1}) = xa(x^{-1}x)ax^{-1} = xaeax^{-1} = xa^2x^{-1}$.
Or, a est d'ordre 2 donc $a^2 = e$. D'où : $(xax^{-1})^2 = xex^{-1} = xx^{-1}$. Donc $(xax^{-1})^2 = e$.
À ce stade, on a juste montré que l'ordre de xax^{-1} est inférieur ou égal à 2

Reste à montrer que $xax^{-1} \neq e$.
Dans ce genre de situation, un raisonnement par l'absurde est le bienvenu...
Supposons par l'absurde que $xax^{-1} = e$. On a alors $x^{-1}(xax^{-1})x = x^{-1}ex$.
Donc $(x^{-1}x)a(x^{-1}x) = x^{-1}x$. Et enfin : $a = e$, ce qui n'est pas possible, car a est d'ordre 2 (et pas 1).
Nous pouvons donc en conclure : $xax^{-1} \neq e$.

Finalement : $(xax^{-1})^2 = e$ et $xax^{-1} \neq e$. Donc xax^{-1} est un élément de G d'ordre 2. Mais le seul élément d'ordre 2 de G est a. Donc $xax^{-1} = a$. Autrement dit (en multipliant des deux côtés par x à droite) : $xa = ax$.
Cela étant valable pour tout $x \in G$, nous pouvons en conclure : $\boxed{a \in C_G}$.