Somme et projecteur

Ayoub Hajlaoui

Après labeur lisez cet écrit qui dépeint
les projecteurs braqués sur vous frêles taupins.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit n un entier naturel non nul. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soient u un endomorphisme de E vérifiant : $u^n = \mathrm{Id}_E$
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et soit p un projecteur de E d'image F.
On définit l'endomorphisme q de E par $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$

1) Montrer que u et q commutent.
2) Déterminer $p \circ q$.
3) Montrer que pour tout vecteur x de F, $q(x) = p(x)$
4) Montrer que q est un projecteur.

Correction :

1) Montrons : $u \circ q = q \circ u$. D'une part, $u \circ q = u \circ \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k}$.

D'autre part, $q \circ u = \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}\Big) \circ u = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k+1}$

Comment passer de l'un à l'autre ? Peut-être qu'un petit changement d'indice...

$q \circ u = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^{i+1} \circ p \circ u^{n-i}$ (en posant $i = k-1$)

Donc $q \circ u = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k}$ *Ça correspond, à peu de choses près, à la somme $u \circ q$... Même terme général mais un terme en trop au début par rapport à $u \circ q$, et un terme manquant à la fin.*

D'où $q \circ u = \dfrac{1}{n}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} + u^{0+1} \circ p \circ u^{n-0} - u^{n+1} \circ p \circ u^{n-n}\Big)$

$= \dfrac{1}{n}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} + u \circ p \circ u^n - u^n \circ u \circ p \circ \mathrm{Id}_E\Big)$

$= \dfrac{1}{n}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} + u \circ p \circ \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E \circ u \circ p \circ \mathrm{Id}_E\Big)$ car $u^n = \mathrm{Id}_E$

$= \dfrac{1}{n}\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} + u \circ p - u \circ p\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k}$. Donc $q \circ u = u \circ q$.

Autrement dit : $\boxed{u \text{ et } q \text{ commutent.}}$

2) *D'où partir ? Si on écrit $p \circ q = p \circ \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}\Big) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p \circ u^k \circ p \circ u^{n-k}$, on ne voit pas tout de suite en faire après... Et si la question ne se résolvait pas par un calcul direct ?*

Pour tout $x \in E$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p \circ u^{n-k}(x) = p\left(u^{n-k}(x)\right) \in F$ (car p est un projecteur d'image F).
De plus, F est stable par u. Donc, par récurrence immédiate, pour tout entier naturel non nul k, F est stable par u^k.
Donc, pour tout $x \in E$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $u^k\left(p(u^{n-k}(x))\right) \in F$.
Autrement dit, $u^k \circ p \circ u^{n-k}(x) \in F$. Par combinaison linéaire d'éléments de l'espace vectoriel F, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}(x) \in F$. C'est-à-dire : $q(x) \in F$.
Pour tout vecteur x de E, $q(x) \in F$.
Or, p est un projecteur d'image F. Donc, pour tout $y \in F$, $p(y) = y$

Et oui, il est bon de connaître les propriétés des projecteurs, et pas seulement le fameux $p \circ p = p$...

On en conclut que pour tout vecteur x de E : $p(q(x)) = q(x)$. $\boxed{\text{Finalement : } p \circ q = q.}$

3) Pour tout vecteur x de F, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $u^{n-k}(x) \in F$ (stabilité de F par u ; et pour $k = n$, $u^{n-k}(x) = u^0(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x \in F$)
Donc $p \circ u^{n-k}(x) = u^{n-k}(x)$. Et donc $u^k \circ p \circ u^{n-k}(x) = u^k \circ u^{n-k}(x) = u^n(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x$.
D'où $q(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x = \frac{1}{n} \times nx = x = p(x)$ (car x est dans F, espace image du projecteur p).
On a bien montré : $\boxed{\forall x \in F,\ q(x) = p(x)}$

4) *On aimerait prouver $q \circ q = q$, mais comment ? On vient de montrer $p \circ q = q$.*
Donc $q \circ q = p \circ q \circ p \circ q$. Bloquant... Mais ce n'est pas la seule manière d'exprimer $q \circ q$ à partir de ce que nous savons déjà !

On a montré en 2) *(pas le résultat final mais dans le développement)* : pour tout $x \in E$, $q(x) \in F$
Donc d'après 3), pour tout $x \in E, q(q(x)) = p(q(x))$. Autrement dit, $q^2 = p \circ q$
Et d'après 2), $p \circ q = q$.
Donc $q^2 = q$.

q est un endomorphisme de E vérifiant $q^2 = q$. $\boxed{q \text{ est donc bien un projecteur de } E.}$