Croissances comparées et intégrales 2

Ayoub Hajlaoui

Lenteur du logarithme, voici qu'une intégrale
d'un calcul magistral nous révèle ton rythme.

Énoncé : (temps conseillé : 55 min)

Le but de cet exercice est de démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ en utilisant des intégrales.
On note g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
1) Déterminer g', la dérivée de la fonction g sur $]1;+\infty[$
2) Justifier que pour tout réel $x \geq e^2$, $g(x) = \dfrac{e^2}{2} + \displaystyle\int_{e^2}^{x} \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$
3) Montrer que pour tout réel $t \geq e^2$, on a : $\ln(t) - 1 \geq \dfrac{\ln(t)}{2}$
4) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a : $t \geq \ln(t)$
5) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x \geq e^2$, $g(x) \geq \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{1}{2}\big(\ln(x) - 2\big)$
6) Conclure.

Correction :

1) g est dérivable sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas).

$\forall x \in]1;+\infty[, g'(x) = \dfrac{1\times\ln(x) - x\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$ donc $\boxed{g'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}}$

2) *Dans le membre de droite de l'égalité qu'on nous demande de prouver, il faut savoir reconnaître la dérivée g'...*

$\forall x \geq e^2, \displaystyle\int_{e^2}^{x} \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_{e^2}^{x} g'(t)\,\mathrm{d}t$. *Et on connait évidemment une primitive de* g'...

$\forall x \geq e^2, \displaystyle\int_{e^2}^{x} \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = \big[g(t)\big]_{e^2}^{x} = g(x) - g(e^2) = g(x) - \dfrac{e^2}{\ln(e^2)} = g(x) - \dfrac{e^2}{2}$

On a prouvé : $\forall x \geq e^2, \displaystyle\int_{e^2}^{x} \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t = g(x) - \dfrac{e^2}{2}$

Autrement dit : $\boxed{\forall x \geq e^2,\ g(x) = \dfrac{e^2}{2} + \displaystyle\int_{e^2}^{x} \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t}$

3) *Ne me simplifierais-je pas la vie si je passais tout le monde du même côté ? D'accord, faisons comme ça, mais sans toutefois nous permettre d'écrire une inégalité pas encore démontrée...*

$\forall t \geq e^2,\ \ln(t) - 1 - \dfrac{\ln(t)}{2} = \dfrac{\ln(t)}{2} - 1$

Et : $\forall t \geq e^2,\ \dfrac{\ln(t)}{2} - 1 \geq \dfrac{\ln(e^2)}{2} - 1$ par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc : $\forall t \geq e^2,\ \dfrac{\ln(t)}{2} - 1 \geq \dfrac{2}{2} - 1 = 0$

Autrement dit : $\boxed{\forall t \geq e^2,\ \ln(t) - 1 \geq \dfrac{\ln(t)}{2}}$

4) *Comment démontrer cette inégalité ? Je ne vois pas forcément le lien avec la question précédente. Ce n'est pas une si mauvaise nouvelle en soi, ça veut juste dire que la 3) servira probablement pour la 5).*

Par ailleurs, inutile de perdre du temps à passer à l'exponentielle, on se retrouverait avec e^t d'un côté et $\ln(t)$ de l'autre... Dans ce genre de cas où tout semble bloqué, n'oubliez pas l'astuce " étude de fonction ".

Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $h(t) = t - \ln(t)$

Il suffit de la définir sur $[1;+\infty[$ puisque l'inégalité est à démontrer sur $[1;+\infty[$.

h est dérivable sur $[1;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables) et : $\forall t \in [1;+\infty[,\ h'(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$

Mettons $h'(t)$ sous la forme la plus simple pour étudier son signe...

$\forall t \in [1;+\infty[,\ h'(t) = \dfrac{t-1}{t}$ avec $t \geq 0$ et $t - 1 \geq 0$ (car $t \geq 1$). Donc $h'(t) \geq 0$

Donc h est croissante sur $[1;+\infty[$. *Il n'y a plus qu'à espérer que $h(1)$ soit positif...*

$h(1) = 1 - \ln(1) = 1$, donc $h(1) \geq 0$.

h étant croissante sur $[1;+\infty[$: $\forall t \in [1;+\infty[,\ h(t) \geq h(1) \geq 0$

Donc h est positive sur $[1;+\infty[$. Autrement dit : $\forall t \in [1;+\infty[,\ t - \ln(t) \geq 0$

Donc : $\boxed{\text{pour tout réel } t \geq 1, \text{ on a : } t \geq \ln(t)}$

5) *L'inégalité qu'on nous demande de prouver revient à minorer l'intégrale. On peut y parvenir en minorant d'abord la fonction sous l'intégrale (g') par une autre fonction dont on pourra calculer l'intégrale. Le calcul de l'intégrale obtenue devra donner du $\ln(x)$ ...*

Pour la minoration en elle-même, nous avons à notre disposition deux billes encore inutilisées, que sont les questions 3) et 4).

$\forall x \geq e^2, \forall t \in [e^2;x],\ \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2} = \big(\ln(t) - 1\big) \times \dfrac{1}{(\ln(t))^2} \geq \dfrac{\ln(t)}{2} \times \dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ (cf question 3)

c'est-à-dire : $\dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2} \geq \dfrac{1}{2\ln(t)}$ *(forme que je ne sais toujours pas intégrer)*

D'après le résultat de la question 4) : $\forall t \geq 1,\ t \geq \ln(t)$. Donc $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\ln(t)}$ et donc $\dfrac{1}{2t} \leq \dfrac{1}{2\ln(t)}$

C'est donc aussi valable pour tout $t \geq e^2$ *(vu que $e^2 > 1$)*

On a donc : $\forall x \geq e^2, \forall t \in [e^2;x],\ \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2} \geq \dfrac{1}{2\ln(t)} \geq \dfrac{1}{2t}$

Autrement dit : $\forall x \geq e^2, \forall t \in [e^2;x],\ \dfrac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2} \geq \dfrac{1}{2t}$

Et ce membre de droite, bien sûr que je peux en trouver une primitive...

Donc, en intégrant (bornes dans le bon sens) :

$\forall x \geq e^2,\ \displaystyle\int_{e^2}^{x} \frac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,dt\,dt \geq \int_{e^2}^{x} \frac{1}{2t}\,dt = \Big[\frac{1}{2}\ln(t)\Big]_{e^2}^{x}$ Donc :

$\forall x \geq e^2,\ \displaystyle\int_{e^2}^{x} \frac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,dt \geq \frac{1}{2}\big(\ln(x) - \ln(e^2)\big)$

Donc : $\forall x \geq e^2,\ \displaystyle\int_{e^2}^{x} \frac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,dt\,dt \geq \frac{1}{2}\big(\ln(x) - 2\big)$. Or, d'après 2), $g(x) = \dfrac{e^2}{2} + \displaystyle\int_{e^2}^{x} \frac{\ln(t)-1}{(\ln(t))^2}\,dt$

Donc : $\forall x \geq e^2,\ \boxed{g(x) \geq \dfrac{e^2}{2} + \dfrac{1}{2}\big(\ln(x) - 2\big)}$

6) *Question à laquelle on peut répondre même si on n'a pas fait tout le reste (en supposant connu le résultat de la question précédente). Mais conclure quoi ? Relisez le but de l'exercice...*

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc, par opérations sur les limites : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\big(\ln(x) - 2\big) = +\infty$

Or : $\forall x \geq e^2, \;\; g(x) \geq \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\big(\ln(x) - 2\big)$.

Donc, par théorème de comparaison, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$. Or, $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)}}$

On en conclut : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com