Vers le supérieur

Version prépa MPSI-MP2I

AYOUB HAJLAOUI

Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filière MP. Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité et maths expertes) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L’auteur en quelques mots

Lauréat de l’agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l’école d’ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l’ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j’ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J’y explique à l’élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n’est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l’optique de l’entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l’apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d’exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j’ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l’arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

En parlant de temps : pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question originellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non($A \Longrightarrow B$), est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

Avec force prudence en malaxant la suite,
montrons l'équivalence entre ces deux limites.

Énoncé : (temps conseillé : 1 h 15 min) (****) *d'après Mines-Ponts 2009 MP Maths 2*

On rappelle qu'une suite (u_n) converge vers un réel l si et seulement si :
$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ , |u_n - l| < \epsilon$

Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On veut montrer l'équivalence suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

1) Montrer que si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

2) On suppose maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ \mu]$ par $f(x) = \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.

a) Etudier les variations de f sur $[0\ ;\ \mu]$.

b) Montrer que si une suite (u_n) converge vers un réel l, alors pour tout réel $l' < l$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n > l'$

c) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} > \dfrac{\mu}{\mu + 1}$

d) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n > \mu$, puis conclure.
On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0; +\infty[$
Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0; +\infty[$.

Rappelons aussi la signification de ces symboles mis en jeu :

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».

- $\exists$ signifie : « il existe »
- $\in$ signifie « appartient ».

La définition de convergence avec les quantificateurs rappelée par l'énoncé est rarement présentée en Terminale (ou alors, de manière succinte, sans insister dessus). A moins que vous ne soyez particulièrement familier avec cette définition, et que vous n'ayez eu l'occasion de la manipuler assez, cet énoncé, bien que court, risque de vous donner du fil à retordre...

« $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ ,|u_n - l| < \epsilon$ » donne, en français : « pour tout réel epsilon strictement positif, il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout (entier naturel) n supérieur ou égal à ce N_ϵ , $|u_n - l| < \epsilon$ (autrement dit la distance entre u_n et l est inférieure à ϵ) ».
Dire $|u_n - l| < \epsilon$ revient à dire $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$

L'idée est donc la suivante : les termes de la suite peuvent être rendus aussi proches que l'on veut de l à condition de prendre des rangs n assez grands.

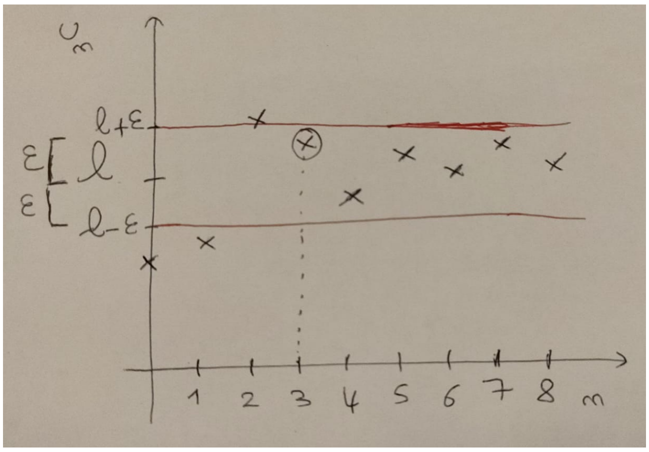

Schéma à main levée (je pense que ça se voit...) représentant les premiers termes d'une suite (u_n) convergeant vers l

Le schéma ci-dessus est censé représenter les premiers termes d'une suite convergeant vers l. Quel que soit le « faisceau » de rayon non nul ($\epsilon > 0$) centré autour de l (correspondant à l'intervalle $]\ l - \epsilon;\ l + \epsilon\ [$ en ordonnée), il existe un rang N_ϵ à partir duquel tous les termes de la suite sont emprisonnés dans le faisceau.

Et ce, quel que soit le rayon ϵ du faisceau, du moment qu'il est non nul...
Dans cet exemple, pour le ϵ de la figure, $N_\epsilon = 3$ semble convenir (tous les entiers supérieurs ou égaux à 3 aussi, d'ailleurs...). Pour tous les n supérieurs ou égaux à ce N_ϵ, on voit effectivement : $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$ (autrement dit, $-\epsilon < u_n - l < \epsilon$, ce qui équivaut à dire : $|u_n - l| < \epsilon$)

Une variante légèrement plus rigoureuse de l'écriture avec les quantificateurs (bien que la précédente soit couramment utilisée et tolérée) est :
$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq N_\epsilon\ \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon$
Pourquoi plus rigoureuse ? Parce que dans la première, lorsqu'on écrit $\forall n \geq N_\epsilon$, on n'indique pas la nature du n en question. Un correcteur de mauvaise foi pourrait faire semblant de comprendre que les n dont on parle seraient des réels en général (alors que le contexte indique clairement que ce sont plus précisément des entiers naturels mais bon, que pouvons-nous contre la mauvaise foi...)

Vous pourrez rencontrer d'autres variantes de cette définition parlant plutôt de N au lieu de N_ϵ (ce qui est tout à fait permis, mais j'aime bien N_ϵ, ça nous rappelle que ce rang dépend de ϵ), ou encore mettant un signe $\leq$ à la place de $<$ (ce qui ne change rien à la définition, grâce au $\forall\ \epsilon$ du début)

Finissons ces remarques avec un rappel sur la notion de divergence vers $+\infty$.
Dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$ revient à dire : $\forall\ M > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ \lambda_n \geq M$

En français : « pour tout réel M strictement positif, il existe un entier naturel n_0 entier naturel tel que pour tout (entier naturel) n supérieur ou égal à ce n_0 , $\lambda_n \geq M$ »
Autrement dit, λ_n peut être rendu aussi grand que l'on veut (plus grand que n'importe quel M) pourvu que n soit assez grand.

Correction de l'exercice 1 :

1) *La valeur absolue me dérange dans mon calcul de limite... Mais si (λ_n) diverge vers $+\infty$, λ_n peut être rendu aussi grand que l'on veut (et, en particulier, plus grand que μ) pourvu que n soit assez grand...*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n \geq \mu$
Autrement dit : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n - \mu \geq 0$, et donc $|\lambda_n - \mu| = \lambda_n - \mu$

Voilà, on a pu se débarrasser de la valeur absolue. À partir d'un certain rang certes, mais cela ne nous dérange pas vu que le résultat auquel il faut aboutir est une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$

Et il nous faut la limite quand n tend vers $+\infty$ de cette quantité, sachant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.
Factorisons donc au numérateur et au dénominateur par le terme le plus « fort » en $+\infty$
C'est λ_n bien sûr, étant donné que les autres termes sont constants (et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$).
Mais cette factorisation par λ_n va faire apparaître des divisions par λ_n...

Pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n \geq \mu$ et $\mu > 0$ d'après l'énoncé. Donc : pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n > 0$ et, a fortiori, $\lambda_n \neq 0$.
Ouf, la factorisation par λ_n est licite ! Ici, il me faut confesser avoir modifié (entre autres bien entendu) une hypothèse de l'énoncé originel pour vous simplifier un peu la vie : celui-ci prenait comme hypothèse $\mu \geq 0$ (et non pas $\mu > 0$). Dans la situation, où μ peut être nul, rappeler que $\lambda_n \geq \mu$ à partir du rang n_0 ne suffirait plus pour permettre la factorisation par λ_n. Il faudrait aussi justifier que $\lambda_n > 0$ à partir d'un certain rang : le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ le garantit.

Donc, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_n}\right)}{\lambda_n\left(1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_n}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{\mu}{\lambda_n}}{1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_n}}$

Enfin, par quotients et sommes de limites, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

$$\boxed{\text{Nous avons bien montré que si : } \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty\text{, alors : } \lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1}$$

Je présente une manière alternative, relativement astucieuse, de venir à bout d'une telle limite à la fin de cette vidéo.

2)a) *Une sympathique question étude de fonction... f est bien définie sur* $[0\ ;\ \mu]$ *puisque c'est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.*

f est dérivable sur $[0\ ;\ \mu]$ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle.
Pour tout $x \in [0\ ;\ \mu]$, $f'(x) = \dfrac{-1\times(x+\mu+1)-(\mu-x)\times 1}{(x+\mu+1)^2} = \dfrac{-x-\mu-1-\mu+x}{(x+\mu+1)^2} = \dfrac{-2\mu-1}{(x+\mu+1)^2}$
Or, pour tout $x \in [0\ ;\ \mu]$, $(x+\mu+1)^2 > 0$ et (puisque $\mu > 0$) $-2\mu-1 < 0$
Donc : $\forall x \in [0\ ;\ \mu],\ f'(x) < 0$

$\boxed{f \text{ est donc strictement décroissante sur } [0\ ;\ \mu]}$

En outre, un calcul simple donne : $f(0) = \dfrac{\mu}{\mu+1}$ et $f(\mu) = 0$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0		μ
f	$\frac{\mu}{\mu+1}$	$\searrow$	0

Certes, l'énoncé ne nous demande pas explicitement le tableau de variation de f ni ses valeurs en 0 et en μ. Mais les résultats de cette question 2a vont manifestement servir pour la suite (sinon, ce serait un sacré intrus...). Autant, puisque cela ne nous coûte quasiment rien en termes d'efforts de calcul, avoir un tableau de variations complet.

2)b) *Un résultat relativement intuitif ; une démonstration assez technique (en tous cas pour un élève au sortir de la Terminale).*
Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel l, et soit l' un réel tel que $l' < l$.
Par définition (rappelée par l'énoncé), on a : $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ ,\ |u_n - l| < \epsilon$
Autrement dit : $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon\ ,\ l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$

Nous disposons donc d'une propriété valable pour tout $\epsilon > 0$. A nous, donc, d'en choisir un qui convienne à nos objectifs. Dans l'encadrement donné par cette propriété, c'est la partie

« ... $< u_n$ » qui nous intéresse (puisque nous voulons montrer qu'il existe un rang à partir duquel u_n est supérieur à...) Il nous suffit de trouver un $\epsilon > 0$ tel que $l - \epsilon = l'$, et le tour est joué !

Posons $\epsilon = l - l'$. Comme $l' < l$, on a bien $\epsilon > 0$. D'où l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N$, $l - (l - l') < u_n < l + (l - l')$, c'est-à-dire : $l' < u_n < 2l - l'$

En particulier *(en ne gardant que la partie gauche de l'encadrement)*, nous avons bien prouvé l'existence d'un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n > l'$.

J'ai appelé l'entier naturel N, et pas N_ϵ. Je fais ce que je veux... En réalité, c'était pour coller à ce que demande l'énoncé, qui parle de l'existence de N tel que... À la rigueur, si je l'avais appelé N_ϵ au départ, rien ne m'aurait empêché, après avoir prouvé qu'un tel entier convient, de le renommer N.

En conclusion, nous avons bien montré que si une suite (u_n) converge vers un réel l, alors pour tout réel $l' < l$: $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > l'$

2)c) *Oh, $\dfrac{\mu}{\mu+1}$, tu me dis quelque chose... Tu es le résultat d'un de mes calculs de 2)a). Plus précisément, tu es la valeur de $f(0)$. Mais ce constat me sera-t-il utile maintenant ? Pas sûr vu ce qu'on me demande, et vu la question précédente..*

Nous savons $\dfrac{\mu}{\mu+1} < 1$ (car $\mu < \mu+1$, inégalité dont nous pouvons diviser chacun des membres par $\mu+1 > 0$). Et nous savons aussi, par hypothèse posée en début de 2) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$.

Donc d'après 2)b), il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} > \dfrac{\mu}{\mu+1}$

Oui, c'est tout. C'est une simple application de 2)b), en prenant pour suite (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1}$, en posant $l = 1$ (qui n'est autre que la limite de u), et $l' = \dfrac{\mu}{\mu+1}$. On a bien, dans ce cas, $l' < l$, ce qui a été mis en évidence. Rien ne nous oblige à nommer ainsi chacun des protagonistes (voilà (u_n) ici, voilà l, voilà l'...) du moment qu'ils sont clairs et que les hypothèses de 2)b) sont rigoureusement vérifiées. Toutefois, si identifier ainsi chacun des intervenants de la 2)c) à un élément de 2)b) peut vous aider à ne pas vous tromper dans les hypothèses à vérifier, ne vous en privez pas.

2)d) *C'est le moment ou jamais (vu que l'exercice touche à sa fin) d'utiliser le lien entre la fonction* f *et* $\frac{\mu}{\mu+1}$*... J'aimerais voir en* $\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}$ *l'image de* λ_n *par* f*, mais la valeur absolue au numérateur m'en empêche. En fait, pour tout entier naturel n,* <u>*si* $\lambda_n \leq \mu$</u>*,* $|\lambda_n-\mu| = \mu-\lambda_n$*, et dans ce cas,* $\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \frac{\mu-\lambda_n}{\lambda_n+\mu+1} = f(\lambda_n)$*. Mais vu le tableau de variation de* f *sur* $[0\ ;\ \mu]$ *(intervalle auquel appartient* λ_n *dans ce cas),* $f(\lambda_n) \leq \frac{\mu}{\mu+1}$*...*

L'énoncé nous propose d'utiliser un raisonnement par l'absurde. Autrement dit, de supposer le contraire de ce que nous voulons démontrer, pour aboutir à une absurdité.

La négation de « tous les chats sont gris » est « il existe un chat qui n'est pas gris » ...

Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $\lambda_n \leq \mu$
Nous supposons donc la négation de : $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$*. Et si nous aboutissons à une absurdité, nous aurons bien montré :* $\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$

Nous avons alors : $\lambda_n - \mu \leq 0$, c'est-à-dire : $|\lambda_n-\mu| = -(\lambda_n-\mu) = \mu-\lambda_n$

Dès lors, $\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \frac{\mu-\lambda_n}{\lambda_n+\mu+1} = f(\lambda_n)$

Or, $\lambda_n \leq \mu$ (par hypothèse). Et $\lambda_n \geq 0$ par hypothèse initiale de l'énoncé. Donc $\lambda_n \in [0\ ;\ \mu]$.
Or, d'après le tableau de variation obtenu en 2a), pour tout réel $x \in [0\ ;\ \mu]$, $f(x) \leq \frac{\mu}{\mu+1}$
En particulier, $f(\lambda_n) \leq \frac{\mu}{\mu+1}$. Autrement dit : $\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} \leq \frac{\mu}{\mu+1}$.

Mais cette inégalité est absurde, vu que $n \geq n_0$, et d'après le résultat de 2)c).
Notre supposition de départ (à savoir : « il existe un entier naturel $n \geq n_0$ tel que $\lambda_n \leq \mu$ ») est donc fausse. Nous pouvons donc en déduire : $\boxed{\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu}$

« Puis conclure. » Comment ça, conclure ? L'énoncé nous annonce au départ qu'on veut (enfin, qu'il veut ; vous, vous n'avez rien demandé...) montrer l'équivalence :
$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$
En 1), nous avons montré l'implication : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$
En 2), nous avons supposé $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = 1$ *et voulons aboutir à :* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$*, pour*

établir l'implication réciproque de la précédente. Mais à quoi pourrait bien servir ce que nous venons de démontrer ? ($\forall n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$) A priori, ce n'est pas du tout suffisant pour arriver à $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ ...

Pour tout $n \geq n_0,\ \lambda_n > \mu$, donc $|\lambda_n - \mu| = \lambda_n - \mu$, et donc : $\dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$

Comme nous savons : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$, nous pouvons en déduire : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$

Mais comment accéder à la limite de (λ_n) ? Peut-être essayer de transformer l'expression de ce quotient dont nous connaissons la limite ?

Pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n + \mu + 1 - 2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} = \dfrac{\lambda_n + \mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} + \dfrac{-2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 1 - \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1}$

L'astuce consiste en le fait de faire apparaître le dénominateur au numérateur (et, bien sûr, d'assumer en soustrayant ce $\lambda_n + \mu + 1$ que nous avons additionné) pour chasser λ_n du numérateur. Le chasser du dénominateur paraissait plus compliqué.
Si on n'a pas vu cette astuce, on peut donner un nom à la quantité $\dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$, en posant par exemple $v_n = \dfrac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}$, et tenter d'exprimer λ_n en fonction de v_n (nous savons que (v_n) converge vers 1)

Nous avons donc : $\lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 1$. Puis : $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 0$ (par somme)

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} = 0$ *Le λ_n qui m'intéresse est au dénominateur...*

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2\mu + 1}{\lambda_n + \mu + 1} > 0$ *La limite précédente est donc un « 0^+ »*

Par quotient de limites : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda_n + \mu + 1}{2\mu + 1} = +\infty$

Enfin, par produit *(en multipliant par $2\mu + 1 > 0$...)* et somme *(...puis en ajoutant $-\mu - 1$)* de limites, nous obtenons : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty}$

Nous avons donc établi, en 1) puis en 2), les deux implications permettant d'établir l'équivalence suivante :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = 1}$$

Exercice 2

Parfumez votre été d'une expression rageante :
fuir la difficulté, c'est prendre la tangente.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min) (**) *d'après Centrale 2000 MP Maths 1*

Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2, et soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R},\ P'(x) \neq 0\}$

1) Justifier sans calcul que pour tout x appartenant à Ω, la tangente en $M\big(x, P(x)\big)$ à la courbe de P coupe l'axe des abscisses.

2) Pour tout a appartenant à Ω, on définit $N_P(a)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $M\big(a, P(a)\big)$ à la courbe de P avec l'axe des abscisses. Montrer que : $\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}$

3) Justifier que la fonction N_P est dérivable sur Ω et déterminer N'_P

4) Justifier qu'il existe un réel A tel que $]\,A;\ +\infty\,[\subset \Omega$

5) On note n le degré de P. Déterminer, en fonction de n : $\lim\limits_{x\to+\infty} N_P(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} N'_P(x)$

On rappelle qu'un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si A et B sont deux fonctions polynomiales non nulles, de degrés respectifs n et p (avec n et $p \in \mathbb{N}$) telles que les termes de plus haut degré de $A(x)$ et $B(x)$ sont respectivement $a_n x^n$ et $b_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$), alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$

Au cas où, voici des exemples de terme de plus haut degré : dans l'expression $3x^5 - 2x^2 + 7$, de degré 5, le terme de plus haut degré est $3x^5$. Dans l'expression $15x^4 - 4x$, de degré 4, qui, soit dit en passant, s'obtient en dérivant la première), le terme de plus haut degré est $15x^4$.

Remarques sur l'énoncé :

Ω est l'ensemble des réels x tels que $P'(x) \neq 0$, c'est-à-dire en lesquels P' ne s'annule pas.

Si A et B sont deux ensembles, $A \subset B$ se lit « A est inclus dans B » , et veut tout simplement dire que tout élément de A est aussi un élément de B.

Certains ont peut-être vu en Terminale le résultat rappelé en italique (même s'il est a priori hors programme). Il s'obtient en factorisant le numérateur $A(x)$ et le dénominateur $B(x)$ par leurs termes de plus haut degré - ce que vous faisiez justement en Terminale pour lever des indéterminations dues à des quotients de fonctions polynomiales en l'infini.

Vous pourrez avoir besoin des résultats suivants (assez intuitifs) portant sur la manipulation des termes de plus haut degré d'expressions polynomiales :

• le terme de plus haut degré du produit de deux polynômes non nuls est tout simplement le produit de leurs termes de plus haut degré. Par exemple, en multipliant $3x^4 - x^2 - 7$, dont le terme de plus haut degré est $3x^4$, et $-2x+3$, dont le terme de plus haut degré est $-2x$, on obtient : $(3x^4 - x^2 - 7)(-2x+3) = -6x^5 + 9x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 14x - 21$, dont le terme de plus haut degré est $-6x^5$, qui n'est autre que $3x^4 \times (-2x)$. Autrement dit, pour obtenir ce terme de plus haut degré de $(3x^4 - x^2 - 7)(-2x+3)$, je n'avais pas besoin d'effectuer tout le calcul, mais simplement de faire le produit des termes de plus haut degré de $3x^4 - x^2 - 7$ et de $-2x+3$

• si deux polynômes ont des degrés différents, le degré de leur somme est égal au maximum de leurs degrés respectifs, et le terme de plus haut degré de leur somme est égal au terme de plus haut degré de celui des deux qui a le plus grand degré. Par exemple, avec $P_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + 1$ et $P_2(x) = 15x - 4$, P_1 est de degré 4 et P_2 de degré 1. Pour tout réel x, $P_1(x) + P_2(x) = 3x^4 - 5x^3 + 15x - 3$. Cette expression est de degré 4 (qui correspond bien au maximum entre 4 et 1) et son terme de plus haut degré est $3x^4$ (qui est le terme de plus haut degré de P_1, celui des deux qui a le plus grand degré)

• si deux polynômes non nuls sont de même degré, le degré de leur somme est inférieur ou égal à ce degré : il peut être strictement inférieur s'il y a des simplifications. Par exemple, avec $P_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$ et $P_2(x) = -3x^4 + 15x - 4$: $P_1(x) + P_2(x) = -5x^2 + 15x - 3$. Cette dernière expression n'est pas de degré 4 mais 2.

Au cours de l'exercice, vous aurez peut-être à vous demander dans quelle situation la somme de deux polynômes de même degré est de même degré que ces deux polynômes (auquel cas le terme de plus haut degré de la somme est facile à obtenir...)

Correction de l'exercice 2 :

1) *Il suffit d'expliquer que la tangente en question n'est pas parallèle à l'axe des abscisses...*

Pour tout x appartenant à Ω, par définition, $P'(x) \neq 0$. Or, $P'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de P au point d'abscisse x. Cette tangente ayant donc un coefficient directeur non nul, elle n'est pas parallèle à l'axe des abscisses, et le coupe nécessairement.

2) *« Pour tout a appartenant à Ω, on définit $N_P(a)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $M\big(a,P(a)\big)$ à la courbe de P avec l'axe des abscisses. » Cette phrase mérite d'être décortiquée. Pour un réel a de Ω, la courbe de P admet une tangente en a, c'est-à-dire au point M de coordonnées $\big(a,P(a)\big)$. D'après la question 1), cette tangente coupe l'axe des abscisses en un certain point : $N_P(a)$ est tout simplement l'abscisse de ce point d'intersection.*

Soit $a \in \Omega$. Notons T_a la tangente à la courbe de P au point d'abscisse a. T_a a pour équation $y = P'(a)(x-a)+P(a)$.
Le point d'intersection de T_a avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\big(N_P(a),0\big)$
Ben oui, son ordonnée est nulle, vu qu'il est sur l'axe des abscisses...

Comme ce point appartient à la droite T_a, ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite. Autrement dit : $P'(a)\big(N_P(a)-a\big)+P(a)=0$. *Isolons tout simplement $N_P(a)$...*
Donc : $P'(a)\big(N_P(a)-a\big) = -P(a)$. Comme a appartient à Ω, $P'(a) \neq 0$.
Les choses sont bien faites, ça nous permet de diviser par $P'(a)$.
D'où : $N_P(a)-a = -\dfrac{P(a)}{P'(a)}$, ce qui nous permet enfin de conclure : $\boxed{\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}}$

Une petite confession. L'énoncé originel demandait de montrer : $\forall x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. J'ai hésité à garder ce choix de lettre, mais ça aurait été la pagaille à coup sûr au moment de parler de l'équation de la tangente T_x (et non T_a, du coup...) au point d'abscisse x : il aurait fallu, dans ce cas, faire attention au fait que x ne peut pas être pris comme abscisse d'un point générique de la tangente (comme ce serait le cas pour une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$). La difficulté aurait pu être contournée, en posant par exemple ainsi l'équation de la droite $T_x : Y = P'(x)(X-x)+P(x)$ (le point générique parcourant la droite aurait pour coordonnées (X,Y)).

Ou alors - option qui me semble plus satisfaisante - prendre l'initiative de renommer le x initial de l'énoncé, en déterminant $N_P(a)$ pour $a \in \Omega$ (afin de garder x pour l'équation de la droite), quitte, en toute-dernière étape, à passer de : $\forall a \in \Omega,\ N_P(a) = a - \dfrac{P(a)}{P'(a)}$ à : $\forall x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. L'égalité étant valable pour tout a de Ω, on peut aussi dire qu'elle est valable pour tout x de Ω. Dans ces deux dernières expressions, on dit que a et x sont des variables muettes.
Bref, j'ai préféré vous éviter toutes ces circonvolutions en vous demandant l'expression de $N_P(a)$ plutôt que celle de $N_P(x)$. En choisissant cette lettre a dont vous avez en général l'habitude pour vos équations de tangente... De rien.

3) Pour tout $x \in \Omega$, $N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)}$. P et P' sont des fonctions polynomiales et P' ne s'annule pas sur Ω (par définition de cet ensemble). Par quotient et somme, nous pouvons donc en déduire que $\boxed{N_P \text{ est dérivable sur } \Omega.}$

Pour tout $x \in \Omega$, $N_P'(x) = 1 - \dfrac{P'(x) \times P'(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)} = 1 - \dfrac{(P')^2(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}$

Comment simplifier cette expression ? Il paraît judicieux de séparer le numérateur en deux. (On pourrait aussi tout mettre sous le même dénominateur)

Donc : $\forall x \in \Omega,\ N_P'(x) = 1 - \dfrac{(P')^2(x) - P(x)P''(x)}{(P')^2(x)} = 1 - \left(\dfrac{(P')^2(x)}{(P')^2(x)} - \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}\right)$
$= 1 - \left(1 - \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}\right) = \dfrac{P(x)P''(x)}{(P')^2(x)}$ *Un oubli de parenthèses eût été fatal...*

Nous avons montré : $\boxed{\forall x \in \Omega,\ N_P'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{\left(P'\right)^2(x)}}$ *$\left(P'\right)^2(x)$, c'est $\left(P'(x)\right)^2$*

On ne voit pas trop comment faire plus simple...

4) *Ω est l'ensemble des réels x tels que $P'(x) \neq 0$. L'ensemble des réels qui n'appartiennent pas à Ω est donc tout simplement l'ensemble des réels x tels que $P'(x) = 0$. Mais qui sont ces réels ? Comment les appelle-t-on ? Ce sont les racines du polynôme P', tout simplement. Oh, l'énoncé me rappelle un résultat sur le nombre de racines d'un polynôme de degré donné...*

Par hypothèse, la fonction polynomiale P est de degré supérieur ou égal à 2. La fonction polynomiale P' est donc de degré $n-1$, supérieur ou égal à 0. Elle admet donc

au plus $n-1$ racines. *Donc au maximum un nombre fini de racines !*
• Si P' admet au moins une racine, ses racines sont en nombre fini, et on peut noter A la plus grande de ces racines. Par définition, aucun réel x strictement supérieur à A n'est racine de P'. Autrement dit : $\forall x > A,\ P'(x) \neq 0$. Ou encore : $\forall x > A,\ x \in \Omega$.
Dans ce cas, on a bien : $]\,A;\ +\infty\,[\subset \Omega$
• Si P' n'admet aucune racine, par définition : $\Omega = \mathbb{R}$. Dans ce cas, pour n'importe quel réel A, on a bien : $]\,A;\ +\infty\,[\subset \Omega$. En particulier (par exemple) $]\,0;\ +\infty\,[\subset \Omega$
Ce second cas, bien que simple, était nécessaire à traiter : il ne faut pas oublier qu'un polynôme peut n'avoir aucune racine réelle. Par exemple : X^2+1 *et* X^4+7

Dans tous les cas, on a bien montré l'existence d'un réel A tel que $]\,A;\ +\infty\,[\subset \Omega$

5) *Le résultat de la question précédente est crucial pour pouvoir parler de limite en* $+\infty$ *de* N_P *et de* N'_P*. Si, par exemple,* Ω *(ensemble sur lequel* N_P *est défini et dérivable) avait été de la forme* $[a;b]$ *avec a et b réel, comment auriez-vous voulu faire tendre x vers* $+\infty$ *dans l'expression de* $N_P(x)$ *(ou de* $N'_P(x)$*) ? La question de la limite en* $+\infty$ *n'a de sens que pour une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme* $]\,A;\ +\infty\,[$*. Autrement dit, pour une fonction dont le domaine de définition est ce que l'on appelle un voisinage de* $+\infty$ *(ce qui nous permet, pour faire simple, « d'approcher* $+\infty$ *» à notre guise).*

Nous aimerions bien entendu pouvoir utiliser le résultat donné par l'énoncé sur la limite en $+\infty$ *d'un quotient de fonctions polynomiales. Mais l'expression de* $N_P(x)$ *ne nous permet pas de le faire en l'état...*

Pour tout $x \in \Omega,\ N_P(x) = x - \dfrac{P(x)}{P'(x)} = \dfrac{xP'(x) - P(x)}{P'(x)}$

Là, nous avons bien deux expressions polynomiales au numérateur et au dénominateur. Reste à déterminer, pour chacune, son terme de plus haut degré.

P est un polynôme de degré $n \geq 2$. En notant $a_n x^n$ le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)$ (avec $a_n \neq 0$), et en dérivant terme à terme, on obtient le terme de plus haut degré dans l'expression de $P'(x)$: c'est $na_n x^{n-1}$ (on a bien $na_n \neq 0$)
Le terme de plus haut degré dans l'expression de $xP'(x)$ est donc $na_n x^n$ (tout simplement celui de $P'(x)$ multiplié par x). Il est de degré n.

Le terme de plus haut degré de $xP'(x)-P(x)$ est donc au plus de degré n : ce degré ne peut pas dépasser n, mais il pourrait en général se retrouver inférieur à n si les termes en x^n de $xP'(x)$ et de $-P(x)$ se simplifient. Toutefois, ici, le terme en x^n de $xP'(x)-P(x)$ est $na_nx^n - a_nx^n$, c'est-à-dire $(n-1)a_nx^n$.

Comme $n \geq 2$, $n-1 \geq 1$ et donc $n-1 \neq 0$. De plus, $a_n \neq 0$. D'où : $(n-1)a_n \neq 0$, ce qui nous permet de conclure que le terme de plus haut degré de $xP'(x)-P(x)$ est bien $(n-1)a_nx^x$

Pour récapituler : dans l'expression $N_P(x) = \frac{xP'(x)-P(x)}{P'(x)}$, le terme de plus haut degré du numérateur est $(n-1)a_nx^n$, et le terme de plus haut degré du dénominateur est na_nx^{n-1}

Nous pouvons en conclure, d'après le résultat donné par l'énoncé :

$$\lim_{x\to+\infty} N_P(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}}$$

Or : $\forall x > 0,\ \dfrac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}} = \dfrac{n-1}{n} \times x$. Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(n-1)a_nx^n}{na_nx^{n-1}} = +\infty$

C'est bien x que nous faisons tendre vers $+\infty$ et pas n, ne vous faites pas avoir.

Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N_P(x) = +\infty}$

Pour tout $x \in \Omega$, $N'_P(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{\left(P'\right)^2(x)}$

Le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)$ est a_nx^n, celui de plus haut degré dans l'expression de $P'(x)$ est na_nx^{n-1} et enfin (en redérivant) celui de plus haut degré dans l'expression de $P''(x)$ est $n(n-1)a_nx^{n-2}$ (rappelons $n \geq 2$)
Nous pouvons en déduire, par produit, que le terme de plus haut degré dans l'expression de $P(x)P''(x)$ est $a_nx^n \times n(n-1)a_nx^{n-2}$, c'est-à-dire $n(n-1)a_n^2x^{2n-2}$.

De même, le terme de plus haut degré dans l'expression de $\left(P'\right)^2(x)$ est $(na_nx^{n-1})^2$, c'est-à-dire $n^2a_n^2x^{2n-2}$.
Par suite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N'_P(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)a_n^2x^{2n-2}}{n^2a_n^2x^{2n-2}}$. Enfin : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} N'_P(x) = \frac{n(n-1)}{n^2}}$

Attention, encore une fois : c'est bien x que nous faisons tendre vers $+\infty$, et pas n. Dans notre cas, n est une constante. Hors de question donc, de dire que la limite du dernier *quotient obtenu serait* 1 *(ce qui aurait été le cas pour* $\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)}{n^2}$*)*

Remarque générale : j'ai bien conscience qu'au sortir de la Terminale, on a très rarement les outils théoriques pour manipuler les polynômes, leurs degrés, leurs termes de plus haut degré avec rigueur (même si l'on a déjà été confronté, de manière plus ou moins directe, à ces notions). Plutôt que de vous faire subir un point de cours parfaitement exhaustif sur la question - vous aurez bien assez de l'an prochain pour ça - j'ai préféré vous laisser manipuler ces notions de manière quelque peu intuitive, avec, en renfort, les remarques sur l'énoncé avant la correction, censées vous fournir les billes suffisantes pour vous permettre d'avancer.

Pour aller plus loin sur la manipulation de polynômes et de leurs degrés, cet exercice (lien) pourra vous intéresser.