Vers le supérieur

Version prépa PCSI

Ayoub Hajlaoui

Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filière PC. Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité et maths expertes) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j'ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d'exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j'ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l'arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

En parlant de temps : pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question originellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non($A \Longrightarrow B$), est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

Par sadisme enseignant, l'auteur serait fort aise
de te voir bégayant entre les hypothèses.

Énoncé : (temps conseillé : 50 min) (***) *d'après CCINP 2024 PC*

On admet qu'il existe une fonction $f :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre conditions suivantes :
(i) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
(ii) $\forall x \in \ ]0\,;+\infty[,\ f(x+1)-f(x)=\ln(x)$
(iii) la fonction f' est croissante sur $]0\,;+\infty[$
(iv) $f(1)=0$
Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.
On cherche à montrer que f est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C).
On considère une fonction $g :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C), et on pose $h = f - g$. Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$

2) Soient $x \in]0\,;1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $f'(p)-g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq f'(1+p)-g'(p)$ puis que $f'(p)-g'(1+p) = h'(p)-\dfrac{1}{p}$. En déduire que $|h'(x+p)-h'(p)| \leq \dfrac{1}{p}$

3) Déduire des questions précédentes que h' est constante sur $]0\,;+\infty[$
4) Conclure.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons la signification de ces symboles, mis en jeu dans cet énoncé et la correction :
- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ».
- $\exists$ signifie : « il existe »
- $\in$ signifie « appartient à ».
- $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, autrement dit l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1

Correction de l'exercice 1 :

1) Pour tout $x > 0$, $h(x+1) = f(x+1) - g(x+1)$. f et g vérifiant les conditions de (C), et en particulier (i), il s'ensuit : $h(x+1) = f(x) + \ln(x) - \big(g(x) + \ln(x)\big) = f(x) - g(x)$
Nous avons bien montré : $\boxed{\forall x > 0,\ h(x+1) = h(x)}$
Le résultat sur les dérivées est à portée de main. Même si nous sommes dans un cas simple, explicitons un minimum la démarche.
La fonction $x \mapsto x+1$ est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car polynomiale. *Et même affine.*
De plus : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x+1 \in]0\,;+\infty[$, et h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Par composition, $x \mapsto h(x+1)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et en dérivant membre à membre l'encadré précédent, nous obtenons bien : $\boxed{\forall x > 0,\ h'(x+1) = h'(x)}$

D'aucuns pourraient trouver les justifications précédentes un peu longues. Ce sont elles, notamment, qui permettent de se prémunir d'erreurs de dérivations qui mèneraient certains, par exemple, à se tromper en écrivant que la dérivée de la fonction $x \mapsto h(x^2)$ est la fonction $x \mapsto h'(x^2)$, alors que c'est $x \mapsto 2xh'(x^2)$.
Au-delà de prévenir d'évenutelles erreurs calculatoires, ces justifications permettent aussi de se rendre compte que « tout se passe bien au niveau des intervalles », c'est-à-dire qu'au sens de la composition, la fonction « à l'intérieur » (la première qu'on applique à x, dans notre cas la fonction $x \mapsto x+1$) est bien dérivable sur l'intervalle demandé, et qu'elle nous renvoie bien vers un intervalle sur lequel la fonction « extérieure » (h dans notre cas) est dérivable.
En parlant d'intervalles, certains élèves au sortir de la Terminale pourraient s'étonner de me voir écrire « la fonction $x \mapsto x+1$ est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car polynomiale ». Ils aimeraient rétorquer : pourquoi sur $]0\,;+\infty[$, et pas sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Rappelons à cet effet que dire d'une fonction qu'elle est dérivable sur un intervalle I n'interdit pas qu'elle le soit sur un intervalle plus grand. Dire : « f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ » n'interdit pas à f d'être aussi dérivable sur $]-\infty\,;0]$. « Mais alors, vu qu'ici, $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, pourquoi ne pas avoir dit ça plutôt qu'un intervalle plus petit ? » Parce qu'ici, c'est la dérivabilité de $x \mapsto h(x+1)$ sur $]0\,;+\infty[$ qui m'intéresse. Et le sens de ce pavé, c'est d'appuyer l'idée qu'une part de la prise d'initiative en mathématiques, c'est d'être capable de faire le tri, dans les informations dont nous disposons, entre celles qui nous servent et celles dont nous pouvons nous délester. J'ai en tête notamment des situations - que nous croiserons peut-être plus loin dans ce document - où il est judicieux de ne travailler que sur une partie des deux inégalités d'un encadrement fourni par l'énoncé...

2) *L'énoncé est assez sympathique pour nous indiquer qu'il ne faut pas utiliser les résultats de 1) ici (ce qui aurait pu nous tenter, et nous faire perdre du temps). Comment parvenir à l'encadrement demandé ? Revenons à l'expression de h en fonction de f et g...*
Pour tout $y > 0$, $h(y) = f(y) - g(y)$. Puis $h'(y) = f'(y) - g'(y)$.
En particulier : $h'(x+p) = f'(x+p) - g'(x+p)$.
Or, par hypothèse (condition (iii)), f' et g' sont croissantes sur $]0\,;+\infty[$. Et $p < x+p \leq 1+p$
Donc : $f'(p) \leq f'(x+p) \leq f'(1+p)$ et $g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p)$

Nous voulons encadrer $f'(x+p) - g'(x+p)$, mais attention à ne pas faire la bêtise de soustraire membre à membre les deux encadrements précédents. Rappelons en effet que $[(a \leq b$ et $c \leq d]$ entraîne $a+c \leq b+d$, mais n'entraîne pas $a-c \leq b-d$
Mais que faire dans ce cas ? Tout simplement, multiplier le second encadrement par -1, en n'oubliant pas de changer le sens des inégalités $(-1 < 0)$

Le dernier encadrement fournit : $-g'(p) \geq -g'(x+p) \geq -g'(1+p)$,
c'est-à-dire : $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$. Et rappelons : $f'(p) \leq f'(x+p) \leq f'(1+p)$
Maintenant, nous pouvons additionner membre à membre ces deux encadrements.
Puis : $f'(p) - g'(1+p) \leq f'(x+p) - g'(x+p) \leq f'(1+p) - g'(p)$
Nous avons bien montré : $\boxed{f'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq f'(1+p) - g'(p)}$

Ensuite : puisque g vérifie (ii), nous savons : $\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ g(x+1) - g(x) = \ln(x)$
g étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, nous pouvons dériver membre à membre pour obtenir :
$\forall x \in\ ]0\,;+\infty[,\ g'(x+1) - g'(x) = \dfrac{1}{x}$ *Une justification plus sobre qu'à la question 1)*

En particulier (comme $p > 0$) : $g'(p+1) - g'(p) = \dfrac{1}{p}$. Autrement dit : $g'(1+p) = \dfrac{1}{p} + g'(p)$
Donc $f'(p) - g'(1+p) = f'(p) - \left(\dfrac{1}{p} + g'(p)\right) = f'(p) - g'(p) - \dfrac{1}{p} = h'(p) - \dfrac{1}{p}$.
Nous avons bien établi : $\boxed{f'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \dfrac{1}{p}}$

Comment, de ces informations, pouvons-nous déduire que $|h'(x+p) - h'(p)| \leq \dfrac{1}{p}$? Nous voyons le $h'(x+p)$ au centre de l'encadrement établi précédemment. Et, forts de la dernière égalité établie, nous pouvons remplacer, dans l'encadrement, le membre de gauche par $h'(p) - \dfrac{1}{p}$. Mais que faire du membre de droite, $f'(1+p) - g'(p)$? Procédons donc de manière *similaire à celle que nous avons suivie pour transformer $f'(p) - g'(1+p)$*

De même que pour g, nous avons : $f'(1+p) = \dfrac{1}{p} + f'(p)$

D'où : $f'(1+p) - g'(p) = \dfrac{1}{p} + f'(p) - g'(p) = \dfrac{1}{p} + h'(p)$

L'encadrement obtenu précédemment peut donc se réécrire :

$h'(p) - \dfrac{1}{p} \leq h'(x+p) \leq h'(p) + \dfrac{1}{p}$. Puis : $-\dfrac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(p) \leq \dfrac{1}{p}$

Autrement dit : $\boxed{|h'(x+p) - h'(p)| \leq \dfrac{1}{p}}$

Rappelons en effet cette équivalence de base dans l'utilisation de la valeur absolue : pour tout $a \geq 0$ et pour tout réel t, dire « $|t| \leq a$ » revient à dire « $-a \leq t \leq a$ »
Vous êtes souvent très prompts à vous souvenir de sa définition : pour tout réel x, $|x| = x$ lorsque x est positif, et $|x| = -x$ lorsque x est négatif. Mais bien moins prompts à garder en tête les propriétés qui en découlent. Reproche un peu sévère à l'endroit d'élèves sortant de Terminale, vu qu'on n'a pas souvent l'occasion de la manipuler sérieusement pendant cette année-là. Mais en prépa, vous y aurez souvent affaire... Tenez, d'ailleurs, voici un lien vers une playlist de vidéos passant en revue l'essentiel des propriétés de la valeur absolue - que vous êtes censés avoir vues pour la plupart - et dont vous aurez besoin.

3) Nous savons que pour tout $x > 0$, $h'(x+1) = h'(x)$. Par récurrence immédiate, nous pouvons en déduire que pour tout entier naturel p : $h'(x+p) = h'(x)$ (*)

Leur balancer un « par récurrence immédiate » dès l'exercice 1... Risqué... Le but n'est pas de vous habituer à la nonchalance rédactionnelle : il ne s'agira pas d'écrire ça dès que vous aurez la flemme de rédiger une récurrence. Il s'agit plutôt de constater honnêtement que l'initialisation d'une telle récurrence est immédiate ($h'(x) = h'(x)$), et que son hérédité est honnêtement triviale : si, pour un certain entier naturel p, $h'(x+p) = h'(x)$ (hypothèse de récurrence), alors $h'(x+p+1) = h'(x+p)$ (par hypothèse sur h') et donc $h'(x+p+1) = h'(x)$ (par l'hypothèse de récurrence)

Nous en déduisons aussi : pour tout entier naturel non nul p, $h'(p) = h'(1)$

$h'(p) = h'(1+p-1) = h'(1)$ en vertu de (*), car $1 > 0$ et $p-1$ est un entier naturel

Or, nous avons établi en 2) : $\forall x \in \left]0\,;1\right]$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $|h'(x+p) - h'(p)| \leq \dfrac{1}{p}$

Ce qui donne aussi, en vertu de ce qui précède : $\forall x \in \left]0\,;1\right],\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ |h'(x) - h'(1)| \leq \dfrac{1}{p}$
C'est marrant, il n'y a pas de p dans le membre de gauche, et l'inégalité est vraie pour tout entier naturel non nul p. Aussi grand que l'on voudrait...

Soit $x \in \left]0\,;1\right]$. Nous savons : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |h'(x) - h'(1)| \leq \dfrac{1}{p}$. Et : $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{p} = 0$

Le théorème des gendarmes (*ou d'encadrement, si vous préférez l'appeler comme ça, mais personnellement, je l'appellerai gendarmes dans ce document*) nous permet donc d'affirmer : $\lim\limits_{p\to+\infty} |h'(x) - h'(1)| = 0$

Mais $|h'(x) - h'(1)|$ est constant vis-à-vis de p. D'où : $\lim\limits_{p\to+\infty} |h'(x) - h'(1)| = |h'(x) - h'(1)|$ ...

Autrement dit : $|h'(x) - h'(1)| = 0$, c'est-à-dire : $h'(x) = h'(1)$.
Nous avons donc montré : $\forall x \in \left]0\,;1\right],\ h'(x) = h'(1) \quad (**)$

Nous y sommes presque ! Il « suffit » d'élargir l'égalité précédente - pour l'instant valable pour tout $x \in \left]0\,;1\right]$ - à tout $x > 0$, et le tour est joué...

Soit $x > 0$. Il existe un entier naturel p tel que $p < x \leq p + 1$.
L'existence d'un tel entier naturel p est assez évidente pour qu'à ce stade, son introduction vous soit permise sans justification. Attention, toutefois, au fait que les inégalités de cet encadrement ne soient pas toutes les deux strictes (sinon, cela interdirait à x d'être entier). Pour les férus de partie entière, en notant $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x, cet entier p, en fait unique, est $p = \lceil x \rceil - 1$ (ce qui revient à dire que $p+1$ est la partie entière supérieure de x).
Autrement dit, il existe un entier naturel p tel que $0 < x - p \leq 1$ Nous avons alors : $h'(x) = h'(x - p + p) = h'(x - p)$ d'après (*).
Et comme $x - p \in \left]0\,;1\right]$, (**) nous permet d'affirmer : $h'(x - p) = h'(1)$.
Nous avons enfin établi : $\forall x > 0,\ h'(x) = h'(1)$
Cela nous permet de conclure que $\boxed{h' \text{ est constante sur } \left]0\,;+\infty\right[}$

4) *Comment ça, « conclure » ? Il faut revenir au but annoncé par l'énoncé : « on cherche à montrer que f est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C) ». A cette fin, on a introduit une fonction g vérifiant ces mêmes conditions, puis $h = f - g$. Nous voulons en fait montrer que $g = f$, c'est-à-dire que h est la fonction nulle sur $\left]0\,;+\infty\right[$*

Nous savons : $\exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ h'(x) = a$.

h est donc une primitive sur $]0\ ;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto a$. Or, les primitives de $x \mapsto a$ sont les fonctions $x \mapsto ax + b$, où b est une constante. h étant une de ces primitives, il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x > 0,\ h(x) = ax + b$ *Reste à prouver que a et b sont nuls...*

f et g vérifient la condition (iv) *On l'avait oubliée, celle-là...*
Donc $h(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$. D'autre part, $h(1) = a + b$. D'où : $\underline{a + b = 0}$.
Une autre équation liant a et b, et le tour est joué.

Nous savons aussi (cf 1) : $\forall x > 0,\ h(x+1) = h(x)$.
Autrement dit : $\forall x > 0,\ a(x+1) + b = ax + b$ ou encore $ax + a + b = ax + b$. Donc : $\underline{a = 0}$.
Nous pouvons en conclure : $a = b = 0$, puis : $\forall x > 0,\ h(x) = 0$.

h est donc la fonction nulle sur $]0\ ;+\infty[$, ce qui revient à dire que les fonctions g et f sont égales.

$\boxed{f \text{ est bien l'unique fonction vérifiant les conditions de (C).}}$

Exercice 2

Pour voir le résultat, quelle idée bien féconde
parfois d'aller jusqu'à la dérivée seconde.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (**) *d'après X-ENS-ESPCI 2019 PC*

Soit $p \in [0\ ;1]$, et soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1-p+pe^x)$ pour tout $x \geq 0$.

1) Montrer que g est bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, exprimer $g''(x)$ sous la forme $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$ où α et β sont des réels positifs pouvant dépendre de x.

2) Montrer que $g''(x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \geq 0$.

3) Montrer que $\ln(1-p+pe^x) \leq px + \dfrac{x^2}{8}$ pour tout $x \geq 0$.

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0;+\infty[$

Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 2 :

1) *Pour montrer que g est définie sur* $\mathbb{R}_+$, *il suffit de montrer :* $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1-p+pe^x > 0$
Par hypothèse, $p \in [0\,;1]$, donc $1-p \geq 0$. De plus, pour tout $x \geq 0$, $e^x > 0$, donc $pe^x \geq 0$
Comment ça, « pour tout $x \geq 0$ *» ? N'est-ce pas vrai pour tout x réel ? Si, bien sûr, mais là, j'avais juste besoin de le dire pour les réels positifs.*

Nous voilà donc avec une somme de deux réels positifs, $1-p$ *et* pe^x*. Mais il nous faut une somme strictement positive...*
En tant que somme de deux réels positifs, $1-p+pe^x$ est nul si et seulement si $1-p$ et pe^x sont simultanément nuls, c'est-à-dire si et seulement si, simultanément, $p=1$ et $p=0$, ce qui est impossible. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1-p+pe^x > 0$.
Enfin, $\boxed{g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+.}$

Remarque : on aurait aussi pu constater : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1-p+pe^x = 1+p(e^x-1)$
Et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}_+$ *:* $\forall x \geq 0,\ e^x \geq e^0 = 1$, *donc* $e^x - 1 \geq 0$
Puis, comme $p \geq 0$, $p(e^x-1) \geq 0$, *et enfin* $1+p(e^x-1) \geq 1 > 0$

La fonction $x \mapsto 1-p+pe^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par produit et somme de fonctions dérivables. Et nous avons établi : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1-p+pe^x \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction ln étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous pouvons en déduire, par composée de fonctions dérivables, que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Nous obtenons : $\boxed{\forall x \geq 0,\ g'(x) = \dfrac{pe^x}{1-p+pe^x}}$ *Du* $\ln\big(u(x)\big)$, *qui se dérive en* $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Puis : g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, de fonctions dérivables. Autrement dit, $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$
Pour tout $x \geq 0,\ g'(x) = p \times \dfrac{e^x}{1-p+pe^x}$

Je mets la constante p en facteur en évidence pour ne pas me la trimballer tout le long de ma dérivation
D'où : $\forall x \geq 0,\ g''(x) = p \times \dfrac{e^x(1-p+pe^x) - e^x \times pe^x}{(1-p+pe^x)^2} = \dfrac{pe^x(1-p)}{(1-p+pe^x)^2}$. Enfin :

$$\boxed{g''(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \text{ avec } \alpha = pe^x \geq 0 \text{ et } \beta = 1-p \geq 0}$$ *Ou inversement, si vous préférez...*

2) *La forme demandée précédemment nous aidera peut-être à établir cette majoration...*

Montrons : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \ (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$.
Pour tous α et β positifs : $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 \geq 0$
Nous avons donc bien : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \ (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$. Autrement dit : $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{4} \times (\alpha+\beta)^2$

A deux doigts d'aboutir au résultat, mais restons rigoureux jusqu'au bout. Attention à la division par zéro...

α et β sont deux réels positifs. Si $\alpha+\beta > 0$, et donc $(\alpha+\beta)^2 > 0$. Dans ce cas, nous obtenons donc : $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leq \dfrac{1}{4}$

En 1), nous avions établi : $\forall x \geq 0, \ g''(x) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$ avec $\alpha = pe^x \geq 0$ et $\beta = 1-p \geq 0$

$\alpha+\beta = 1-p+pe^x > 0$ (établi en 1 pour la définition de g). *Ouf, condition respectée !*

Finalement : $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0, \ g''(x) \leq \dfrac{1}{4}}$

*L'inégalité $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$, valable pour tous réels α et β, est équivalente à : $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$
Comme elle est vraie quels que soient les signes de α et β, elle fournit plus généralement : $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)$. Cette inégalité, relativement simple à obtenir, s'avérera très pratique (tellement pratique que mon prof de maths en MP l'appelait « la clé ») pour pas mal de majorations dont vous aurez besoin au cours de votre cursus...*

Ici, j'ai un peu forcé le lien avec les inégalités de 2), mais cette clé s'obtient tout simplement à partir de $\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2 \geq 0$, équivalente à $|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \geq 0$, c'est-à-dire $\alpha^2+\beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$

3) Montrons que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1-p+pe^x) \leq px + \dfrac{x^2}{8}$, c'est-à-dire : $px + \dfrac{x^2}{8} - g(x) \geq 0$

Reconnaître g, c'est bien la moindre des choses. Et maintenant... Etude de fonction, avec dérivations successives, pour prouver que cette quantité est positive (le fait de nous avoir fait pencher longuement sur $g''(x)$ nous y fait penser).

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = px + \frac{x^2}{8} - g(x)$.
h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = p + \frac{2x}{8} - g'(x) = p + \frac{x}{4} - g'(x)$
Puis : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h''(x) = \frac{1}{4} - g''(x)$. *Oh toi, je connais ton signe...*
D'après 2), pour tout réel positif x, $h''(x) \geq 0$. Donc h' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

D'accord, mais je préférerais le signe de h' sur $\mathbb{R}_+$ plutôt que ses variations.

De plus, $h'(0) = p - g'(0) = p - \frac{pe^0}{1 - p + pe^0} = p - \frac{p}{1} = 0$.

La croissance de h' sur $\mathbb{R}_+$ entraîne donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) \geq h'(0) = 0$.
h est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

D'accord, mais je préférerais le signe de h sur $\mathbb{R}_+$ plutôt que ses variations...

$h(0) = p \times 0 + 0 - g(0) = -\ln(1 - p + pe^0) = -\ln(1) = 0$

La croissance de h sur $\mathbb{R}_+$ entraîne donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \geq h(0) = 0$.
Nous avons donc montré : $\forall x \geq 0,\ px + \frac{x^2}{8} - g(x) \geq 0$

Autrement dit : $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0,\ \ln(1 - p + pe^x) \leq px + \frac{x^2}{8}}$

Ces dérivations successives d'une fonction différence bien choisie - ici h - pourront vous tirer d'affaire dans pas mal de situations où il faut établir une inégalité difficile à obtenir par opérations « simples » , et où le fait de dériver arrange l'expression (dans notre cas, le fait de dériver deux fois nous a permis de tomber sur une fonction dont nous connaissons le signe grâce à une information préalable sur g).
Bien sûr, pour que les choses se passent bien, il faut un minimum de « chance » , ou du moins un pari sur le fait qu'en rebroussant chemin de h'' à h, les signes des dérivées s'obtiendront relativement simplement.

Vous avez peut-être (ou pas) déjà croisé ce procédé en Terminale, notamment dans le cadre d'inégalités avec des fonctions trigonométriques.
Voici un lien vers un cas classique de son utilisation, qui permet de démontrer une croissance comparée mettant en jeu la fonction exponentielle.