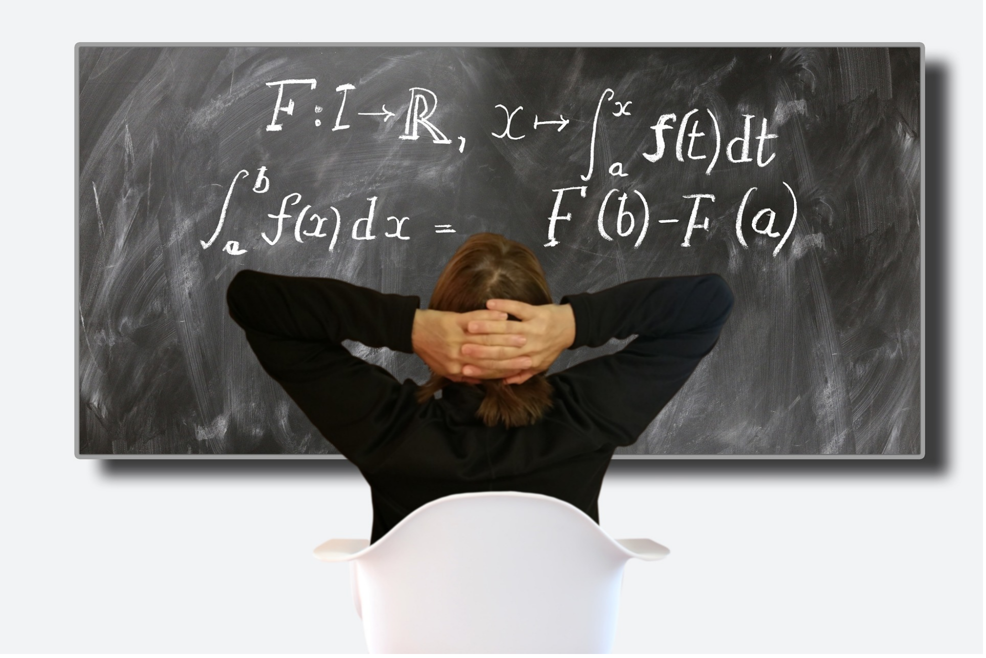
Vers le supérieur

Version prépa ECG (maths approfondies)

Ayoub Hajlaoui



Avant-propos

Ce document comporte une vingtaine de problèmes mathématiques corrigés, tous extraits de sujets de concours de fin de CPGE (concours d'entrée aux grandes écoles), en filières ECS/ECE (très récents ancêtres de la filière ECG, jusqu'en 2022). Ils sont remaniés de sorte que le programme de Terminale (spécialité) est le seul prérequis pour en venir à bout. À cette fin, des questions intermédiaires ont parfois été ajoutées au sujet original. Les notions, définitions ou résultats qui pourraient manquer à l'élève pour parvenir à la résolution lui sont donnés en hypothèse, ainsi que des indications supplémentaires et remarques utiles.

La première originalité de ce document réside donc dans sa nature de pont entre le rivage du lycée et celui des concours. En se concentrant principalement sur des notions vues par l'élève l'an passé (suites, fonctions, intégrales, entre autres), il lui propose de les mobiliser pour faire tomber des questions de sujets de concours, montrant ainsi de manière pratique l'intérêt de bien maîtriser ces notions, de les voir comme des alliées de taille qui l'épauleront tout au long de la prépa, plutôt que de présenter leur révision comme une corvée estivale. En outre, de par les nouveautés introduites ça et là pour affiner ces dernières, de par un grand nombre de questions abordant des notions générales de raisonnement et d'ensembles, ce recueil donne au lycéen un avant-goût de la glorieuse chevauchée qui l'attend, en lui mettant le pied à l'étrier. Il lui rappellera certaines de ses errances de l'an passé, tout en le préparant à l'année à venir - sans prétendre constituer une liste exhaustive de ce qui y sera vu.

Si ces exercices ne nécessitent pas d'autre prérequis que le programme de Terminale, ils s'avéreront, en pratique, difficiles pour un élève au sortir du lycée. Le degré d'atsuce nécessaire, les idées qu'il faut avoir pour faire tomber telle ou telle question, détonnent avec la plupart des exercices rencontrés en Terminale, dont les pistes étaient en général plus claires, et les résolutions plus « téléphonées ».

C'est ici qu'intervient la seconde originalité de ce document par rapport à d'autres recueils d'exercices corrigés, originalité qui constitue son atout majeur : la correction, très détaillée, insiste autant que possible sur « le pourquoi de l'idée » , la question de l'apparition de la première étincelle : à quoi telle situation nous fait-elle penser ? pourquoi est-il judicieux d'emprunter telle voie, de penser à telle astuce à ce moment-là plutôt qu'à un autre ? quel écueil faut-il éviter et comment voir que c'est un piège ? Vous trouverez de telles considérations en italique, en parallèle de la correction à proprement parler. Autant de didascalies rythmant la pièce de théâtre mathématique aux premières loges de laquelle vous êtes convié. Lever de rideau.

L'auteur en quelques mots

Lauréat de l'agrégation externe de mathématiques en 2020 (64 ème sur 323 admis et 3069 inscrits), docteur en mathématiques appliquées (université Paris VI), diplômé de l'école d'ingénieurs des Mines de Nancy et du master recherche MVA (Maths Vision Apprentissage) de l'ENS Cachan, je donne des cours de mathématiques (particuliers et en groupe, niveau lycée à prépa/L3) depuis 2008. Je suis également colleur en MPSI au lycée Charlemagne (Paris), lycée où j'ai moi-même effectué mes années de prépa MPSI/MP.

Parallèlement, je rédige des exercices de mathématiques (principalement niveau prépa et Terminale) ainsi que des corrigés particulièrement détaillés, que vous pouvez consulter librement sur `www.ayoub-et-les-maths.com`. J'y explique à l'élève non seulement le cheminement, mais aussi et surtout pourquoi il doit avoir telle idée à tel moment, pourquoi telle autre idée n'est pas appropriée, quel piège il faut éviter ; cela, dans l'optique de l'entraîner au raisonnement réel, et non à la mimique maladroite qui est l'apanage du plus grand nombre.

Sur ma chaîne youtube « Ayoub et les maths », vous trouverez également bon nombre de vidéos d'exercices corrigés niveau Terminale et prépa (parmi ceux que j'ai donnés en colle notamment), des séries thématiques pour vous familiariser avec des notions spécifiques comme le signe somme, le calcul matriciel, la valeur absolue, ainsi que des conseils plus généraux pour vous améliorer en mathématiques. Et même, une série dénommée « Où est l'arnaque » : ce sont des exercices corrigés avec des erreurs de raisonnement volontaires - révélées en fin de vidéo, bien sûr - pour tester votre vigilance mathématique...

Table des matières

Introduction

Les problèmes présentés dans ce document sont de longueur et difficulté variables. Une évaluation de cette dernière, subjective, est précisée à titre indicatif en début de chaque problème :
(*) facile (**) moyen (***) difficile (****) particulièrement difficile
J'insiste sur le caractère subjectif de cette évaluation. Si elle s'appuie sur des paramètres tels la complexité des notions mises en oeuvre et le fait que les astuces à voir pour résoudre les questions de chaque exercice soient plus ou moins cachées, plus ou moins évidentes, l'observation empirique l'influence grandement : une sorte de moyenne vague de la difficulté ressentie par les nombreux élèves que j'ai pu côtoyer (cours particuliers, TD, colles...) face à un genre de question ou d'enchaînement de questions. Il s'agit aussi, pour moi, de comparer, en termes de difficulté, les exercices de ce document les uns aux autres.
Pas de panique, donc, si vous butez face à un exercice classé comme « moyen » ou « facile » . Faites de votre mieux dans le temps imparti, puis lisez attentivement la correction.

En parlant de temps : pour chaque problème, un temps de travail préconisé est indiqué. Il ne correspond pas forcément au temps au bout duquel l'exercice doit être résolu, mais plutôt au temps de recherche au bout duquel il devient raisonnable de commencer à regarder la correction. Il peut en effet être pertinent de vous imposer de réfléchir en temps limité, pour vous entraîner aux conditions d'examen. Mais si tel énoncé vous intrigue particulièrement, si vous vous sentez prêt de le faire tomber, si vous aimeriez en venir à bout (peut-être pour des raisons de fierté personnelle, peut-être pas), quitte à lui consacrer plus de temps que les autres, n'hésitez surtout pas. C'est en jouant de ces deux modes temporels que l'on peut s'améliorer durablement en mathématiques. Une telle idée est développée plus en détail dans cet article.

Chaque énoncé est suivi de « remarques sur l'énoncé ». Il ne s'agit nécessairement d'indications sur la résolution, mais plutôt de précisions sur les notations introduites par l'énoncé, ou de rappels de concepts mathématiques utiles.

La correction à proprement parler est en caractères normaux. Les passages en italique correspondent à des commentaires sur cette correction. Principalement, le fameux « pourquoi de l'idée » , cette substance fugace décrite tant bien que mal dans l'avant-propos. Mais aussi, par moments, des réflexions sur d'autres méthodes que celle choisie dans la correction, des analogies avec d'autres situations, des discussions sur telle ou telle erreur courante commise par les élèves à tel endroit. Plus rarement, deux ou trois confidences sur mes choix éditoriaux : pourquoi ai-je reformulé ainsi la question originellement présente dans le sujet ? Pourquoi ai-je ajouté telle question ? Vous mettre à la place du « concepteur » du sujet (même si le titre qui me conviendrait le mieux ici serait celui de reformulateur), tenter d'en comprendre la cohérence, vous attacher aux liens entre les questions et à leur fil conducteur peut vous aider à vous sortir du labyrinthe.

Place, maintenant, à de brèves considérations d'ordre général, qui seront complétées au besoin par les remarques sur chaque énoncé. Votre aventure mathématique dans le supérieur consistera en grande partie en la manipulation d'**assertions** . Ce sont des phrases syntaxiquement correctes (autrement dit, qui ont du sens) et qui sont soit vraies, soit fausses.

Comment ça, « soit vraies, soit fausses » ? N'est-ce pas trop général comme définition ? Toute phrase ne deviendrait-elle pas une assertion ?
Certainement pas, voyez plutôt :

- A : « $3^2 + 12 \times 7$ » n'est pas une assertion, car dire qu'elle serait vraie ou fausse n'aurait aucun sens.
- B : « $\forall x + \mathbb{R},\ x^2 \leq 2$ » n'est pas une assertion, car elle n'est pas syntaxiquement correcte.
- C : « $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0$ » est une assertion. C'est même une assertion vraie.
- D : « $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 0$ » est une assertion. C'est une assertion fausse.
- D : « $x + 7 \geq 2$ » est une assertion. C'est une assertion dont la véracité dépend du choix du paramètre x. Pour l'anecdote, une telle assertion est appelée un prédicat.

Rappelons la signification des symboles $\forall$ et $\exists$:

- $\forall$ signifie : « pour tout », ou encore « quel que soit ». L'assertion C se lit donc : « pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ ». Ou encore, de manière équivalente : « quel que soit le réel x non nul, $x^2 > 0$ »

- $\exists$ signifie « il existe ». L'assertion D se lit donc : « il existe un réel x tel que $e^x \leq 0$ » Voyez comment j'ai intercalé un « tel que » à la place de la virgule, pour que la phrase ait du sens en français.

Si A et B sont deux assertions mathématiques, « $A \Longrightarrow B$ » (se lit « A implique B ») veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
Autrement dit, A est une condition suffisante à B.
Il suffit que A soit vrai pour que B soit vrai.
Autrement dit, B est une condition nécessaire à A.
A ne peut pas être vrai sans que B ne soit vrai.

« $A \Longleftrightarrow B$ » (se lit « A équivaut à B » ou « A est équivalent à B ») veut dire que nous avons à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$. Autrement dit : A est vrai si et seulement si B est vrai.

La négation de « $A \Longrightarrow B$ » , notée non($A \Longrightarrow B$), est « A et non(B) ».
Autrement dit, A n'entraîne pas B puisque A est réalisé mais pas B

Exercice 1

De classiques questions pour vous mettre en confiance
et que nous avancions dénués d'impatience.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min) (**) *d'après EDHEC 2016 ECS*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer ses limites aux bornes de son intervalle de définition.

2) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera α cette solution.

4) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$

Remarques sur l'énoncé :

Rappelons au cas où que $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs. C'est donc $[0;+\infty[$
Quant à $\mathbb{R}_+^*$, c'est l'ensemble des réels positifs non nul. C'est donc l'ensemble des réels strictement positifs, c'est-à-dire $]0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 1 :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée et quotient de fonctions dérivables, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$ *(factorisation pour mieux voir le signe)*

N'oubliez pas dans quel ensemble se situe x...
Pour tout $x > 0$, $x+1 > 0$, $x^2 > 0$, et $e^{-x} > 0$
(la dernière inégalité étant même vraie pour tout réel x)

Donc, pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Reste à calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ donc, par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$ (et en particulier en 0) : $\lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = e^0 = 1$. Et : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ « $\dfrac{1}{0^+}$ », *si vous voulez...*
Par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.
Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Enfin, par produit de limites : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

Toujours essayer un calcul de limite direct, avant de se mettre à tenter de lever des indéterminations qui, parfois, n'existent que dans notre tête. (Bien évidemment, la plupart des questions portant sur des limites met en jeu des formes indéterminées, mais il serait dommage de se mettre inutilement dans l'impasse lorsque ce n'est pas le cas)

2) *Bien entendu, on peut dériver g, étudier le signe de g'..., mais ici, on n'est même pas obligé de passer par une dérivation. Voyez plutôt :*

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition avec la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier sur $\mathbb{R}_+$.
D'autre part, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto -x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. *(on a multiplié la fonction carré par $-1 < 0$)*
Par somme des fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -x^2$ strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, la fonction

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

Une somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ne nous aurait pas permis de conclure. Un produit de deux fonctions ne nous aurait pas permis de conclure. Même un produit de deux fonctions croissantes : tenez, faites le produit avec elle-même de la fonction $x \longmapsto x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et vous obtenez la fonction carré, certainement pas croissante sur $\mathbb{R}$!)

3) *Ca sent le corollaire du théroème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) à plein nez. Sauf qu'il faudrait « = constante » plutôt que « = x » pour pouvoir l'appliquer...*
Dès lors, que faire de ce x ? Le passer de l'autre côté par soustraction ? Un coup d'oeil à la fonction g me permet de me rendre compte que ce ne serait pas le déplacement le plus intéressant ici...

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} = x \Longleftrightarrow e^{-x} = x^2 \Longleftrightarrow e^{-x} - x^2 = 0 \Longleftrightarrow g(x) = 0$

Et bien voilà une formulation plus intéressante pour utiliser le corollaire du TVI ! Avant d'aller plus loin, petite remarque sur la rédaction.
Lorsque j'écris : « Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x \Longleftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} = x$ », je ne dis certainement pas :
« pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x$, c'est-à-dire que l'on a $\dfrac{e^{-x}}{x} = x$ »
Non, je dis que, pour tout $x > 0$, l'égalité $f(x) = x$ est vraie si et seulement si l'égalité $\dfrac{e^{-x}}{x} = x$ est vraie. Autrement dit, pour tout $x > 0$, ces deux égalités (et en fait toutes les égalités qui ont suivi, reliées par le signe $\Longleftrightarrow$), sont équivalentes.
D'où l'importance d'utiliser les symboles $\Longleftrightarrow$ et $\Longrightarrow$ à bon escient, uniquement dans les situations qui s'y prêtent. Plus de détails dans cet article.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ (par composée et somme de fonctions continues).
De plus, d'après 2), g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
On n'oublie surtout pas de calculer les valeurs (ou limites) aux bornes.
$g(0) = e^{-0} - 0^2 = 1$ et, par calcul direct de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
Vous serez parfois amené à écrire : $g\big(\left]0;+\infty\right[\big) = \left]-\infty;1\right[$
Enfin : $0 \in \left]-\infty\,;1\right[$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet donc de conclure que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cette équation étant équivalente, sur $\mathbb{R}_+^*$, à l'équation $f(x) = x$, nous pouvons finalement affirmer que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4) *Il s'agit tout simplement de comparer* $g\left(\frac{1}{e}\right)$, $g(\alpha)$ *(c'est-à-dire* 0*) et* $g(1)$
Plus précisément, il s'agirait de montrer que $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$*, puis de conclure grâce à la stricte décroissance de* g.

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(-\frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e}\right)^2$ *La notation* $\exp\left(-\frac{1}{e}\right)$ *est plus commode que* $e^{-\frac{1}{e}}$*...*

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{\exp(2)}$. *Comparons donc* $\frac{1}{e}$ *et* 2*...*

On sait : $\frac{1}{e} < 2$ (car $\frac{1}{e} < 1 < 2$)
Donc, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $\exp(\frac{1}{e}) < \exp(2)$.

Les deux membres de l'inégalité précédente sont strictement positifs, et nous permettent donc ce qui va suivre.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} > \frac{1}{\exp(2)}$
Autrement dit : $\frac{1}{\exp(\frac{1}{e})} - \frac{1}{\exp(2)}$, c'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

D'autre part, $g(1) = e^{-1} - 1^2 = e^{-1} - 1 = e^{-1} - e^0$
Or : $-1 < 0$. Donc, par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} < e^0$. D'où : $g(1) < 0$.

Nous avons donc montré : $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 > g(1)$

C'est-à-dire : $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1)$

La stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}_+$ nous permet enfin de conclure : $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$

Exercice 2

Face aux nombreuses lettres, la main novice tremble
mais restez-en le maître. Vérifiez vos ensembles.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min) (**) *d'après HEC 2017 ECE*

Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)$

1) Soit $y \geq 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$

2) Soit $u \in \left]0;1\right]$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $G_{a,b}(x) = u$.

Remarques sur l'énoncé :

Toutes ces lettres ne doivent pas vous inquiéter. Quand on vous demande de résoudre une équation, demandez-vous calmement qui en est l'inconnue.

Correction de l'exercice 2 :

1) *Mettons-nous d'accord tout de suite : cette équation est bien évidemment d'inconnue x. Quant à y, c'est un réel positif posé au départ.*

Pour tout réel x : $\quad ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y \iff \dfrac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$

L'équation de départ est équivalente à cette reformulation, plus intéressante... En effet, on reconnaît maintenant une équation du second degré, mais il va falloir le justifier, même rapidement.

$b > 0$ donc $\dfrac{b}{2} \neq 0$. L'équation $\dfrac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ d'inconnue x est donc une équation du second degré.
Si on avait $\dfrac{b}{2} = 0$, l'équation serait devenue $ax - y = 0$: rien à voir avec du second degré...

Son discriminant est : $\Delta = a^2 - 4 \times \dfrac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by$, avec $a^2 > 0$ (car $a \neq 0$), $b > 0$ et $y \geq 0$. On a donc $\Delta > 0$

L'équation $\dfrac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ admet donc deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2 \times \frac{b}{2}} = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$ et $x_2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$.

Ne vous emmêlez pas les pinceaux sur les lettres : nous avons tous appris $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, mais le tout est de savoir qui est qui ici.
Ne soyez pas <u>prisonnier des lettres</u> ; attachez-vous plutôt à ce qu'elles désignent.

> Finalement, quel que soit $y > 0$, l'équation $ax + \dfrac{b}{2}x^2 = y$ d'inconnue x admet exactement deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$ et $x_2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$

2) *Attention aux ensembles spécifiés... Il y a peu de risque que vous oubliiez l'intervalle dans lequel se situe u. Par contre, n'oubliez pas que vous résolvez l'équation sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire sur $[0; +\infty[$.*

Pour tout réel positif x :

$G_{a,b}(x) = u \iff \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = u \iff -ax - \frac{b}{2}x^2 = \ln(u)$
La dernière équivalence est valable car $u > 0$

$-ax - \frac{b}{2}x^2$*... Voilà qui devrait vous rappeler quelque chose ! Peut-être à un signe près...*

D'où : $G_{a,b}(x) = u \iff ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$

Là, pas question de remettre les mains dans le cambouis du calcul, si je l'ai déjà fait... J'ai envie d'utiliser le résultat de la question 1), valable pour n'importe quel $y \geq 0$. Oui mais là, c'est $-\ln(u)$ qui jouerait le rôle de y. D'où la nécessité de justifier qu'il est positif.

$u \in]0;1]$. Donc (comme $\ln(1) = 0$, et par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$) $\ln(u) \leq 0$.
Donc $-\ln(u) \geq 0$.
En prenant $y = -\ln(u)$, le résultat de 1) nous permet d'affirmer que l'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(u)$ admet exactement deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$ et $x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

Et là, attention à ne pas oublier que l'on cherche les solutions positives...

$a > 0$, $b > 0$ et $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq 0$ donc $x_1 < 0$.
Pour x_2, il faut s'intéresser au signe de $-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}$
$b\ln(u) \leq 0$ donc $-2b\ln(u) \geq 0$, et donc $a^2 - 2b\ln(u) \geq a^2$.
Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq \sqrt{a^2} = a$ (car $a > 0$)
On a donc : $\sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} - a \geq 0$, c'est-à-dire : $-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)} \geq 0$, et enfin : $x_2 \geq 0$

Finalement, quel que soit $u \in]0;1]$, l'équation $G_{a,b}(x) = u$ d'inconnue x admet exactement une solution sur $\mathbb{R}_+$: $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

Autrement dit, tout réel u de l'intervalle $]0;1]$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par l'application $G_{a,b}$.
Nous savons même exprimer cet antécédent en fonction de u : c'est $\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(u)}}{b}$

L'an prochain, vous direz que l'application $G_{a,b}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow &]0;1] \\ x & \longmapsto & \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \end{array}$

est bijective et que sa bijection réciproque est $G_{a,b}^{-1}: \begin{array}{ccc}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \dfrac{-a+\sqrt{a^2-2b\ln(u)}}{b} \end{array}$

$G_{a,b}^{-1}$ *est tout simplement l'application qui « fait le travail dans l'autre sens que* $G_{a,b}$ *» : à tout élément u de* $]0;1]$, $G_{a,b}^{-1}$ *associe l'unique antécédent de u dans* $\mathbb{R}_+$ *par* $G_{a,b}$.