Majoration de |th|

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Soit th la fonction tangente hyperbolique. Montrer que pour tout réel x, $|\text{th}(x)| \geq \dfrac{|x|}{1+|x|}$

Correction :

Distinguons des cas pour nous débarrasser de ces valeurs absolues...

Pour tout réel x, $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \times \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ du signe de $e^x - e^{-x}$
Pour $x \geq 0$, on a $x \geq -x$ d'où, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^x \geq e^{-x}$.
th est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. On montre de même que th est négative sur $\mathbb{R}_+$.
On remarque aussi (ou on rappelle) que th est impaire.

Pour tout $x \geq 0$, $|\text{th}(x)| = \text{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(qu'on voudrait donc comparer à* $\dfrac{x}{1+x}$ *)*
Comment se ramener à une telle forme ? Par exemple, comment faire en sorte que la différence entre le numérateur et le dénominateur soit égale à 1 ? Pour l'instant, la différence entre les numérateur et dénominateur est égale à $2e^{-x}$*...*

$$|\text{th}(x)| = \frac{2e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2})}{2e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}) + 1}$$

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
On a donc, pour tout $x \geq 0$: $|\text{th}(x)| = f(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2})$, qu'on veut comparer à $f(x)$.
f est strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$ (s'obtient immédiatement par dérivation).
Il suffit donc d'établir que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2} \geq x$ *pour pouvoir conclure*
Nous savons que pour tout réel $t \geq 0$, $e^t - 1 \geq t$
Inégalité classique, vue en cours, ou démontrable facilement en étudiant la fonction $t \mapsto e^t - 1 - t$
Donc pour tout $x \geq 0$, $e^{2x} - 1 \geq 2x$, ce qui donne : $\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2} \geq x$

Par croissance de la fonction f sur $]-1\,;\,+\infty[$, on obtient, pour tout $x \geq 0$: $f(\dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{1}{2}) \geq f(x)$

D'où : pour tout $x \geq 0$, $|\text{th}(x)| \geq \dfrac{x}{1+x}$. Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout } x \geq 0 : |\text{th}(x)| \geq \dfrac{|x|}{1+|x|}}$

Pour tout $x < 0$, $\dfrac{|x|}{1+|x|} = \dfrac{-x}{1-x}$ et $|\text{th}(x)| = -\text{th}(x) = \text{th}(-x)$ par imparité de th.
Remarquons que dans ce cas, $-x > 0$. Donc, en nous ramenant au cas précédent, $\text{th}(-x) \geq \dfrac{-x}{1-x}$

Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout } x < 0 : |\text{th}(x)| \geq \dfrac{|x|}{1+|x|}}$

On a donc bien montré : $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ |\text{th}(x)| \geq \dfrac{|x|}{1+|x|}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com